Universidad Nacional Mayor de San Marcos

Universidad del Perú. Decana de América

Facultad de Ciencias Matemáticas

Escuela Profesional de Matemática

Sobre operadores lineales en el álgebra geométrica

TESIS

Para optar el Título Profesional de Licenciada en Matemática

AUTOR

Jessica BARRIENTOS VIVANCO

ASESOR

Dr. Edgar Diógenes VERA SARAVIA

Lima, Perú

2019

Reconocimiento - No Comercial - Compartir Igual - Sin restricciones adicionales

https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/

Usted puede distribuir, remezclar, retocar, y crear a partir del documento original de modo no comercial, siempre y cuando se dé crédito al autor del documento y se licencien las nuevas creaciones bajo las mismas condiciones. No se permite aplicar términos legales o medidas tecnológicas que restrinjan legalmente a otros a hacer cualquier cosa que permita esta licencia.

Referencia bibliográfica

Barrientos, J. (2019). *Sobre operadores lineales en el álgebra geométrica*. Tesis para optar el título profesional de Licenciada en Matemática. Escuela Profesional de Matemática, Facultad de Ciencias Matemáticas, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Lima, Perú.

HOJA DE METADATOS COMPLEMENTARIOS

CÓDIGO ORCID DEL AUTOR: https://orcid.org/0000-0003-3173-5053

CÓDIGO ORCID DEL ASESOR: https://orcid.org/0000-0002-3634-8549

DNI DEL AUTOR: 42750885

GRUPO DE INVESTIGACIÓN:
Modelos Cuantitativos Aplicados a la Investigación Científica

INSTITUCIÓN QUE FINANCIA PARCIAL O TOTALMENTE LA INVESTIGACIÓN:

UBICACIÓN GEOGRÁFICA DONDE SE DESARROLLÓ LA INVESTIGACIÓN. DEBE INCLUIR LOCALIDADES Y COORDENADAS GEOGRÁFICAS.

Lima – Perú:

- Longitud: O76°44'33.18"
- Latitud: S7°4'43.36"

AÑO O RANGO DE AÑOS QUE LA INVESTIGACIÓN ABARCÓ:

2017- 2019

UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS
(Universidad del Perú, DECANA DE AMÉRICA)
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMATICAS
Ciudad Universitaria – Av. Venezuela S/N cuadra 34
Teléfono: 619-7000, Anexo 1610
Correo Postal: 05-0021, E-mail: eapmat@unmsm.edu.pe
Lima – Perú

Escuela Profesional de Matemática

ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TESIS PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO EN MATEMÁTICA

En la UNMSM - Ciudad Universitaria - Facultad de Ciencias Matemáticas, siendo las ...16:00...... horas del Viernes 18 de octubre de 2019, se reunieron los docentes designados como Miembros del Jurado Evaluador de Tesis: Dr. Jorge Alberto Coripaco Huarcaya (PRESIDENTE), Galindo Taza Chambi (MIEMBRO), Dr. Edgar Diógenes Vera Saravia (MIEMBRO ASESOR), para la sustentación de la tesis titulada: «SOBRE OPERADORES LINEALES EN EL ÁLGEBRA GEOMÉTRICA», presentado por la señorita Bachiller JESSICA BARRIENTOS VIVANCO, para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática.

Luego de la exposición de la tesista, el Presidente del Jurado invitó a dar respuestas a las preguntas que le formulen.

Hecha la evaluación correspondiente por los Miembros del Jurado, la tesista mereció la aprobación unánime obteniendo como calificativo promedio la nota de:

....Dieciocho (sobresaliente)......(18).

A continuación, el Presidente del Jurado, Dr. Jorge Alberto Coripaco Huarcaya, manifestó que la señorita Bachiller JESSICA BARRIENTOS VIVANCO, en vista de haber aprobado la sustentación de su tesis, será propuesta para que se le otorgue el Título Profesional de Licenciado en Matemática.

Siendo las .16:50...... horas se levantó la sesión firmando para constancia la presente Acta en tres (3) copias originales.

DR. JORGE ALBERTO CORIPACO HUARCAYA
PRESIDENTE

MG. GALINDO TAZA CHAMBI
MIEMBRO

Edgar Vera S.

DR. EDGAR DIÓGENES VERA SARAVIA
MIEMBRO ASESOR

FICHA CATALOGRÁFICA

JESSICA BARRIENTOS VIVANCO

Sobre Operadores Lineales en el Álgebra Geométrica,
LaTeX, (Lima) 2019.
viii, 89 p. 27,2 cm. (UNMSM, Licenciada, Matemática, 2019)
Tesis, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Ciencias Matemáticas 1, Matemática.
I. UNMSM/Facultad de Ciencias Matemáticas.
II. Sobre Operadores Lineales en el Álgebra Geométrica. (Álgebra Geométrica)

Este trabajo esta dedicado a mis padres Solano Barrientos y Martha Vivanco, quienes siempre me apoyaron e incentivaron a seguir adelante con mis objetivos.

Agradecimientos

En primer lugar agradezco a Dios por haberme ayudado a terminar mi tesis, sin él no lo hubiera podido lograr. El camino para terminar con este trabajo fue muy difícil, fueron muchas horas leyendo, resolviendo y digitando todo lo relacionado con el trabajo. Hubieron momentos donde perdía fuerzas para seguir adelante, pero a pesar de todas las dificultades presentadas en el camino, terminé el trabajo gracias al apoyo de mis seres queridos.

Agradezco a mis padres Solano Barrientos Berrocal y Martha Vivanco Maldonado, quienes siempre me apoyaron y me dieron fuerzas para seguir adelante y con esa motivación termine la tesis.

Agradezco al Dr. Edgar Vera Saravia, por haber dedicado su tiempo orientándome con sus conocimientos sobre el tema en la elaboración de mi tesis.

RESUMEN

SOBRE OPERADORES LINEALES EN EL ÁLGEBRA GEOMÉTRICA

JESSICA BARRIENTOS VIVANCO

Octubre 2019

Asesor	:	Dr. Edgar Diógenes Vera Saravia.
Título Obtenido	:	Licenciada en Matemática.

El presente trabajo trata sobre los operadores lineales en el Álgebra Geométrica Euclideana Tridimensional AG(3), que es el álgebra de Clifford en el espacio euclideano $\mathbb{R}^3$. El objetivo es mostrar que los operadores lineales se pueden reescribir usando el formalismo del álgebra geométrica, mejorando el tratamiento matemático tradicional.

Este nuevo enfoque presenta una visión alternativa del álgebra de matrices, porque trabaja directamente con vectores sin recurrir a sus componentes en alguna base, por ello esta versión invariante facilita el cálculo.

Los operadores lineales más importantes serán representados en términos del álgebra geométrica, usando la suma y producto de multivectores.

Palabras Claves : Álgebra Geométrica.
Producto Interior.
Producto Exterior.
Producto Geométrico.
Operadores Lineales.

ABSTRACT

ON LINEAR OPERATORS IN THE GEOMETRIC ALGEBRA

JESSICA BARRIENTOS VIVANCO

October 2019

Adviser : Dr. Edgar Diógenes Vera Saravia.

Obtained Degree : Licentiate in Mathematic.

The present work is about linear operators in the Three-dimensional Euclidean Geometric Algebra AG(3), which is the Clifford algebra in the euclidean space $\mathbb{R}^3$. The objective is to show that linear operators can be rewritten using the geometric algebra formalism, improving the traditional mathematical treatment.

This new approach presents an alternative view of matrix algebra, because it works directly with vectors without resorting to its components in some base, so this invariant version facilitates the calculation.

The most important linear operators will be represented in terms of geometric algebra using the sum and product of multivectors.

Keywords : Geometric Algebra.
Inside product.
Outside product.
Geometric Product.
Linear Operators.

Índice general

Introducción

El presente trabajo trata sobre los operadores lineales en el Álgebra Geométrica Euclideana Tridimensional AG(3). Esta álgebra geométrica es una representación de las álgebras de Clifford en el espacio euclideano $\mathbb{R}^3$. Este trabajo tiene como objetivo mostrar que los operadores lineales escritos con un formalismo matemático tradicional se pueden reescribir usando el formalismo del álgebra geométrica.

El álgebra geométrica presenta una visión alternativa del álgebra de matrices. El cálculo se desarrolla sin introducir bases arbitrarias y se opera directamente los vectores sin descomponerlos en componentes. Este nuevo enfoque presenta una notación invariante que facilita el cálculo. Por esta razón se dice que esta álgebra es más eficiente que el álgebra de matrices, ya que presenta un mayor contenido algebraico geométrico.

Los operadores lineales más importantes serán representados en términos del álgebra geométrica usando la suma y producto de multivectores. Por ejemplo:

$$P_y(x) = y^{-1}(y \downarrow x) = \frac{1}{2}(x + y^{-1}xy)$$

es el operador proyección en términos del álgebra geométrica.

El trabajo esta dividido en tres capítulos:

En el Capítulo 1 se definirá el concepto de producto interior y sus propiedades. Luego los conceptos de los productos nuevos: el producto exterior y el producto geométrico, que serán usados en todo el desarrollo del trabajo.

En el Capítulo 2 se desarrollará el concepto del Álgebra Geométrica Euclideana Tridimensional AG(3) con una representación polinomial. Luego se definirá el producto interior, exterior, vectorial y sus propiedades. Finalmente algunos conceptos de gran utilidad en el desarrolllo del trabajo, como el trivector básico, la dualidad geométrica y bivectores.

En el Capítulo 3 se desarrollará el concepto de los operadores lineales en el Álgebra Geométrica Euclideana Tridimensional AG(3). Luego se definirá los conceptos y propiedades de los operadores lineales más importantes usando el formalismo del álgebra geométrica. Los operadores lineales que serán representados en términos del álgebra geométrica son: operadores adjuntos, no-singulares, simétrico, antisimétrico, ortogonal y normal. También se presentará un nuevo concepto el operador inducido, que es un operador que preserva producto exterior.

Capítulo 1

Los Orígenes del Álgebra Geométrica

En este capítulo mencionaremos algunos puntos históricos importantes sobre los orígenes del álgebra geométrica. También se mencionará los personajes que contribuyeron directamente con la construcción de lo que conocemos actualmente como álgebra geométrica.

En 1844, Grassmann publica de forma completa la "teoría de la extensión". Esta fue una obra muy novedosa para su época, que fue incomprendida por los matemáticos que la leyeron o intentaron leerla. Grassmann escribía con un elevado nivel de abstracción, producto de su formación académica. En esta obra Grassmann presenta el producto exterior, que fue ignorado gran parte de su vida. Clifford leyó la obra de Grassmann y comprendió la importancia de cómo encajaban los cuaterniones de Hamilton dentro de sus ideas.

En 1878, Clifford publicó un artículo llamado Applications of Grassmann's Extensive Algebra. En este artículo Clifford propone unir los productos interiores y exteriores en un solo producto, llamado el producto geométrico. Toda la teoría que implica estos productos lo denominó álgebra geométrica. Esta álgebra permite unificar diferentes conceptos matemáticos como álgebra exterior, operadores lineales, determinantes, números complejos, cuaterniones, espinores, etc. Clifford hubiera podido relacionar su producto con los cuaterniones, y su sistema debería haber dominado la física matemática. Pero Clifford murió joven, a la edad de solo 33 años. Luego el cálculo vectorial fue fuertemente promovido por Gibbs y rápidamente se hizo popular, eclipsando a Clifford y el trabajo de Grassmann. Estos acontecimientos históricos lo podemos encontrar en [3].

Gibbs, Heaviside y Helmholtz impulsaron la idea de que siendo el mundo físico tridimensional solo se necesitaba el álgebra vectorial, pero esta álgebra resultó limitada y presentó serias deficiencias frente a los requerimientos matemáticos de la relatividad y la mecánica cuántica. Por ello se detuvo el uso del álgebra geométrica hasta la primera mitad del siglo XX.

En 1928, Pauli considero el álgebra real no conmutativa de matrices complejas $\mathbb{C}^{2x2}$, una conocida representación matricial del álgebra geométrica AG(3) que será utilizada en el presente trabajo. Pauli utilizó las siguientes matrices llamadas las matrices de Pauli,

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \sigma_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \sigma_3 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$$

para construir la base de $\mathbb{C}^{2x2}$, como $\mathbb{R}$-espacio vectorial:

$$\{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_1\sigma_2, \sigma_1\sigma_3, \sigma_2\sigma_3, \sigma_1\sigma_2\sigma_3\} \tag{1.1}$$

donde σ_0 denota la matriz identidad.
Para abstraer conceptos y construir el álgebra geométrica AG(3) que nos interesa, conviene considerar nuevas variables:

$$\sigma_0 = 1 \;\; y \;\; \sigma_i = e_i, \;\; para \;\; i \in \{1, 2, 3\}$$

En este nuevo contexto la base de Pauli (1.1) se escribe:

$$\{1, e_1, e_2, e_3, e_1e_2, e_1e_3, e_2e_3, e_1e_2e_3\} \tag{1.2}$$

Y operando con matrices se tiene que la base (1.2) determina una tabla multiplicativa que se muestra en el capítulo 2.

En 1966, David Hestenes recupera el significado geométrico subyacente a las álgebras de Pauli y Dirac. Publica sus resultados en el álgebra del espacio-tiempo. En 1984, Hestenes y Sobczyk publican Álgebra de Clifford para Cálculo Geométrico. Este libro describe un lenguaje unificado para muchos para matemáticos, físicos e ingenieros. En 1986, Hestenes publica Nuevos Fundamentos para la Mecánica Clásica.(Ver [3])

Desde 1990, Cambridge utiliza frecuentemente el álgebra geométrica a diversos temas como agujeros negros y cosmología, teoría del campo cuántico, visión por computador, etc.

Ahora desarrollaremos algunas definiciones y propiedades importantes que contribuyeron directamente a la teoría de lo que hoy conocemos como Álgebra Geométrica.

1.1. El Producto Interior

Definición 1.1.1. *Sea V un espacio vectorial real. Supongamos que a todo par de vectores x e $y \in V$ se le asigna número real denotado por $x \downarrow y$. Esta función se llama producto interior en V si satisface los siguientes axiomas: (Ver[5])*

1. $(\alpha x + \beta y) \downarrow z = \alpha(x \downarrow z) + \beta(y \downarrow z)$

2. $x \downarrow y = y \downarrow x$

3. $x \downarrow x \geq 0$ *y además si* $x \downarrow x = 0 \iff x = 0$

1.2. El Producto Exterior

Por ahora solo vamos a denotar el producto exterior de dos vectores y también su interpretación geométrica. En capítulo 2 definiremos el producto exterior de multivectores de manera general.
El producto exterior de dos vectores x e y se denota por:

$$x \uparrow y$$

Observación 1.2.1.

1. *$x \uparrow y$ es llamado bivector.*

2. *El bivector $x \uparrow y$ se puede representar como un segmento de plano dirigido. (Figura 1.1)*

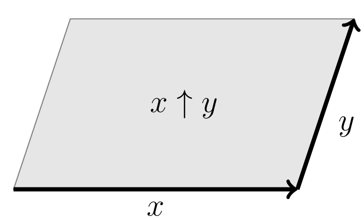


Figura 1.1:

3. *Los bivectores $x \uparrow y$ e $y \uparrow x$ tienen orientaciones opuestas. (Figura 1.2)*

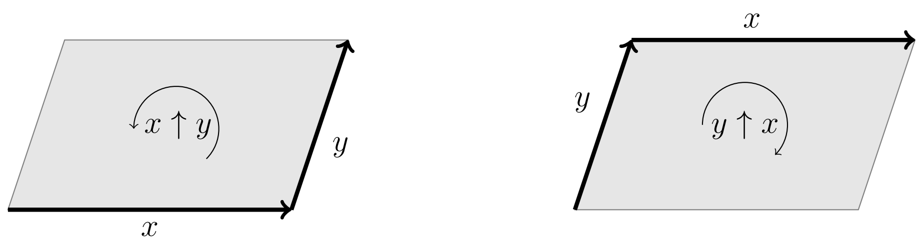
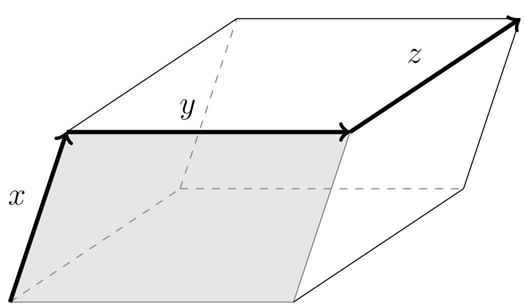


Figura 1.2:

4. *El producto exterior del bivector $x \uparrow y$ con el vector z se escribe $(x \uparrow y) \uparrow z$. (Figura 1.3)*



$(x \uparrow y) \uparrow z$

Figura 1.3:

Proposición 1.2.2. *Sean x, y, z vectores. Se cumple:(Ver [4])*

1. $x \uparrow y = -y \uparrow x$
2. $x \uparrow x = 0$
3. $\lambda(x \uparrow y) = (\lambda x) \uparrow y = x \uparrow (\lambda y)$
4. $x \uparrow (y + z) = x \uparrow y + x \uparrow z$
5. $(x \uparrow y) \uparrow z = x \uparrow (y \uparrow z)$

1.3. El Producto Geométrico

Definición 1.3.1. *El producto geométrico de dos vectores x e y se define por:*

$$xy = x \downarrow y + x \uparrow y$$

Observación 1.3.2.

1. *Sabemos que el producto geométrico de dos vectores x e y es:*

$$xy = x \downarrow y + x \uparrow y \tag{1.3}$$

$$yx = y \downarrow x + y \uparrow x \tag{1.4}$$

   Como $x \uparrow y = -y \downarrow x$
   Sumando y restando (1.3) *y* (1.4) *tenemos:*

$$x \downarrow y = \frac{1}{2}(xy + yx) \tag{1.5}$$

$$x \uparrow y = \frac{1}{2}(xy - yx) \tag{1.6}$$

2. *De la ecuación* (1.5) *tenemos:*

$$xy = 2x \downarrow y - yx$$

3. *Si $x \uparrow y = 0$, entonces: $xy = x \downarrow y = yx$*

4. *Si $x \downarrow y = 0$, entonces: $xy = x \uparrow y = -y \uparrow x = -yx$*

Ejemplo 1.3.3. *Sean e_1, e_2 vectores canónicos, entonces : $e_1e_2 = e_1 \uparrow e_2$*
En efecto:
Como $e_1 \downarrow e_2 = 0$, entonces:

$$e_1e_2 = e_1 \downarrow e_2 + e_1 \uparrow e_2$$
$$\Rightarrow e_1e_2 = e_1 \uparrow e_2$$

Proposición 1.3.4. *Sean x, y, z vectores. Se cumple:(Ver [4])*

1. $(xy)z = x(yz)$

2. $x(y + z) = xy + xz$
   $(x + y)z = xz + yz$

3. $\lambda(xy) = (\lambda x)y = x(\lambda y)$

4. $xy \neq yx$

Capítulo 2

El Álgebra Geométrica Euclideana Tridimensional AG(3)

En este capítulo definiremos lo que se conoce hoy en día como El Álgebra Geométrica Euclideana Tridimensional AG(3), con una representación polinomial, esta versión lo podemos encontrar en [10] . Luego se desarrollará algunas propiedades y conceptos importantes que serán de gran utilidad en el desarrollo del tema.

Usaremos como estructura inicial el siguiente $\mathbb{R}$-espacio vectorial de polinomios reales, en las variables e_1, e_2, e_3, donde $e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)$.

$$AG(3) = \left\{ \sum_{i=0}^{7} a_i e_i \text{ tal que } a_i \in \mathbb{R} \right\}$$

Denotamos:

$$\begin{aligned} e_0 &= 1 \\ e_4 &= e_1 e_2 = e_{12} \\ e_5 &= e_1 e_3 = e_{13} \\ e_6 &= e_2 e_3 = e_{23} \\ e_7 &= e_1 e_2 e_3 = e_{123} \end{aligned}$$

Utilizaremos la base canónica de $\mathbb{R}^3$ para definir El Álgebra Geométrica Euclideana Tridimensional AG(3), pero en general se puede utilizar cualquier base ortonormal para definir esta álgebra geométrica.

2.1. Definiciones y Propiedades Principales

Definición 2.1.1. *El Álgebra Geométrica Euclideana Tridimensional AG(3) es el* $\mathbb{R}$-*espacio vectorial de polinomios reales, en las variables* e_1, e_2, e_3

$$AG(3) = \{x_0 + x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 + x_4 e_4 + x_5 e_5 + x_6 e_6 + x_7 e_7 \textit{ tal que } x_i \in \mathbb{R}\}$$

AG(3) estará provisto de un producto distributivo y asociativo pero no conmutativo llamado producto geométrico, determinado por una aplicación $\mathbb{R}$-bilineal asociativa pero no conmutativa: $AG(3) \times AG(3) \to AG(3)$, que se procesa utilizando la distributidad, la asociatividad y la siguiente tabla en lugar de la conmutatividad:

$\mathbf{1}$	$\boldsymbol{e_1}$	$\boldsymbol{e_2}$	$\boldsymbol{e_3}$	$\boldsymbol{e_1e_2}$	$\boldsymbol{e_3e_1}$	$\boldsymbol{e_2e_3}$	$\boldsymbol{e_1e_2e_3}$
$\boldsymbol{e_1}$	1	e_1e_2	$-e_3e_1$	e_2	$-e_3$	$e_1e_2e_3$	e_2e_3
$\boldsymbol{e_2}$	$-e_1e_2$	1	e_2e_3	$-e_1$	$e_1e_2e_3$	e_3	e_3e_1
$\boldsymbol{e_3}$	e_3e_1	$-e_2e_3$	1	$e_1e_2e_3$	e_1	$-e_2$	e_1e_2
$\boldsymbol{e_1e_2}$	$-e_2$	e_1	$e_1e_2e_3$	-1	e_2e_3	$-e_3e_1$	$-e_3$
$\boldsymbol{e_3e_1}$	e_3	$e_1e_2e_3$	$-e_1$	$-e_2e_3$	-1	e_1e_2	$-e_2$
$\boldsymbol{e_2e_3}$	$e_1e_2e_3$	$-e_3$	e_2	e_3e_1	$-e_1e_2$	-1	$-e_1$
$\boldsymbol{e_1e_2e_3}$	e_2e_3	e_3e_1	e_1e_2	$-e_3$	$-e_2$	$-e_1$	-1

Observación 2.1.2.

1 . *La estructura vectorial de AG(3) nos permite sumar sus elementos como polinomios, sin embargo para multiplicar se debe tener en cuenta que se trata de un proceso similar al producto de polinomios pero solo podemos usar la distributividad y la asociatividad pero no la conmutatividad, en su lugar debemos usar la tabla anterior.*

2 . *De la tabla anterior se verifica la 3-Condición de Dirac Euclideana:*

$$e_ie_j + e_je_i = 2\delta_{ij},\ \textit{donde}\ i, j \in \{1, 2, 3\}$$

Donde δ_{ij} es el delta de kronecker:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & , i = j \\ 0 & , i \neq j \end{cases}$$

Proposición 2.1.3. *La condiciones de Dirac son equivalentes a las condiciones de Grassmann - Clifford:*

$$e_ie_i = 1\ \textit{y}\ e_je_i = -e_ie_j;\ \textit{donde}\ i, j \in \{1, 2, 3\}$$

Demostración.
Probaremos que las condiciones de Dirac implican las condiciones de Grassmann - Clifford. Tenemos por hipótesis: $e_ie_j + e_je_i = 2\delta_{ij}$, $i, j \in \{1, 2, 3\}$, donde:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & , i = j \\ 0 & , i \neq j \end{cases}$$

- Si $i = j$: $e_ie_i + e_ie_i = 2\delta_{ii} \Rightarrow 2e_ie_i = 2(1) \Rightarrow e_ie_i = 1$
- Si $i \neq j$: $e_ie_j + e_je_i = 2\delta_{ij} \Rightarrow e_ie_j + e_je_i = 2(0) \Rightarrow e_ie_j = -e_je_i$

Por lo tanto se satisface las condiciones de Grassmann-Clifford.

Recíprocamente si se satisface : $e_ie_i = 1, e_je_i = -e_ie_j,\ i,j \in \{1,2,3\}$

- Si $i = j$: $e_ie_i + e_ie_i = 2 \Rightarrow e_ie_i + e_ie_i = 2(1) \Rightarrow e_ie_i + e_ie_i = 2\delta_{ii}$
- Si $i \neq j$: $e_ie_j = -e_je_i \Rightarrow e_ie_j + e_je_i = 0 = 2\delta_{ij} \Rightarrow e_ie_j + e_je_i = 2\delta_{ij}$

Por lo tanto se satisface las condiciones de Dirac. □

Proposición 2.1.4. *El conjunto* $\{1, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$ *es una* $\mathbb{R}$*-base de AG(3)*

Demostración.
Sabemos que: $e_4 = e_1e_2$, $e_5 = e_1e_3$, $e_6 = e_2e_3$, $e_7 = e_1e_2e_3$.
Primero probaremos que el conjunto $\{1, e_{123}\}$ es linealmente independiente.
En efecto:
Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $a + be_{123} = 0$, entonces $0 \leq a^2 = (-be_{123})^2 = -b^2 \leq 0$, de donde se concluye que $a = b = 0$.
Probaremos que el conjunto $\{1, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$ es linealmente independiente
En efecto:
Sea $x_i \in \mathbb{R}$ tal que:

$$x_0 + x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 + x_4e_4 + x_5e_5 + x_6e_6 + x_7e_7 = 0 \tag{2.1}$$
$$e_1(x_0 + x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 + x_4e_4 + x_5e_5 + x_6e_6 + x_7e_7)e_1 = 0$$
$$e_1x_0e_1 + e_1x_1e_1e_1 + e_1x_2e_2e_1 + e_1x_3e_3e_1 + e_1x_4e_4e_1 + e_1x_5e_5e_1 + e_1x_6e_6e_1 + e_1x_7e_7e_1 = 0$$
$$x_0e_1e_1 + x_1e_1e_1e_1 + x_2e_1e_2e_1 + x_3e_1e_3e_1 + x_4e_1e_4e_1 + x_5e_1e_5e_1 + x_6e_1e_6e_1 + x_7e_1e_7e_1 = 0$$
$$x_0 + x_1e_1 + x_2e_1e_2e_1 + x_3e_1e_3e_1 + x_4e_1e_1e_2e_1 + x_5e_1e_1e_3e_1 + x_6e_1e_2e_3e_1 + x_7e_1e_1e_2e_3e_1 = 0$$
$$x_0 + x_1e_1 + x_2e_1e_2e_1 + x_3e_1e_3e_1 + x_4e_2e_1 + x_5e_3e_1 + x_6(-e_2e_1)(-e_1e_3) + x_7e_2(-e_1e_3) = 0$$
$$x_0 + x_1e_1 + x_2e_1(-e_1e_2) + x_3e_1(-e_1e_3) + x_4e_1(-e_1e_2) + x_5e_1(-e_1e_3) + x_6e_2e_3 + x_7e_1e_2e_3 = 0$$
$$x_0 + x_1e_1 - x_2e_2 - x_3e_3 - x_4e_4 - x_5e_5 + x_6e_6 + x_7e_7 = 0 \tag{2.2}$$

Sumando (2.1) y (2.2) tenemos :

$$
\begin{aligned}
&x_0 + x_1e_1 + x_6e_6 + x_7e_7 = 0 &\quad (2.3)\\
&e_2(x_0 + x_1e_1 + x_6e_6 + x_7e_7)e_2 = 0\\
&e_2x_0e_2 + e_2x_1e_1e_2 + e_2x_6e_6e_2 + e_2x_7e_7e_2 = 0\\
&x_0e_2e_2 + x_1e_2e_1e_2 + x_6e_2e_6e_2 + x_7e_2e_7e_2 = 0\\
&x_0 + x_1e_2(-e_2e_1) + x_6e_2e_2e_3e_2 + x_7e_2e_1e_2e_3e_2 = 0\\
&x_0 - x_1e_1 + x_6e_3e_2 + x_7(-e_1e_2)e_2e_3e_2 = 0\\
&x_0 - x_1e_1 + x_6(-e_2e_3) + x_7e_1(-e_3e_2) = 0\\
&x_0 - x_1e_1 + x_6(-e_2e_3) + x_7e_1e_2e_3 = 0\\
&x_0 - x_1e_1 - x_6e_6 + x_7e_7 = 0 &\quad (2.4)
\end{aligned}
$$

Sumando (2.3) y (2.4) tenemos :

$$
\begin{aligned}
&x_0 + x_7e_7 = 0\\
&(x_0 + x_7e_7)e_7 = 0\\
&x_0e_7 + x_7e_7e_7 = 0\\
&x_0e_7 + x_7e_1e_2e_3e_1e_2e_3 = 0\\
&x_0e_7 + x_7(e_1e_2e_3)^2 = 0\\
&x_0e_7 + (-1)x_7 = 0\\
&x_0e_7 - x_7 = 0\\
\Rightarrow &x_0 = x_7 = 0\,,\ \text{pues } \{1, e_{123}\} \text{ es L.I.} &\quad (2.5)
\end{aligned}
$$

Sumando (2.4) y (2.5) tenemos :

$$
\begin{aligned}
&-x_1e_1 - x_6e_6 = 0\\
&x_1e_1 + x_6e_6 = 0\\
&e_1(x_1e_1 + x_6e_6) = 0\\
&x_1e_1e_1 + x_6e_1e_6 = 0\\
&x_1e_1e_1 + x_6e_1e_2e_3 = 0\\
&x_1 + x_6e_7 = 0\\
\Rightarrow &x_1 = x_6 = 0\,,\ \text{pues } \{1, e_{123}\} \text{ es L.I.} &\quad (2.6)
\end{aligned}
$$

De (2.1),(2.5) y (2.6) tenemos :

$$\begin{aligned}
&x_2e_2 + x_3e_3 + x_4e_4 + x_5e_5 = 0 \qquad (2.7)\\
&e_2(x_2e_2 + x_3e_3 + x_4e_4 + x_5e_5)e_2 = 0\\
&e_2x_2e_2e_2 + e_2x_3e_3e_2 + e_2x_4e_4e_2 + e_2x_5e_5e_2 = 0\\
&x_2e_2e_2e_2 + x_3e_2e_3e_2 + x_4e_2e_4e_2 + x_5e_2e_5e_2 = 0\\
&x_2e_2 + x_3e_2(-e_2e_3) + x_4e_2e_1e_2e_2 + x_5e_2e_1e_3e_2 = 0\\
&x_2e_2 + x_3(-e_3) + x_4e_2e_1 + x_5(-e_1e_2)(-e_2e_3) = 0\\
&x_2e_2 - x_3(e_3) + x_4(-e_1e_2) + x_5(e_1e_3) = 0\\
&x_2e_2 - x_3(e_3) - x_4e_1e_2 + x_5(e_1e_3) = 0\\
&x_2e_2 - x_3e_3 - x_4e_4 + x_5e_5 = 0 \qquad (2.8)
\end{aligned}$$

Sumando (2.7) y (2.8) tenemos :

$$\begin{aligned}
&x_2e_2 + x_5e_5 = 0\\
&(x_2e_2 + x_5e_5)e_2 = 0\\
&x_2e_2e_2 + x_5e_5e_2 = 0\\
&x_2 + x_5e_1e_3e_2 = 0\\
&x_2 + x_5e_1(-e_2e_3) = 0\\
&x_2 - x_5e_7 = 0\\
\Rightarrow &x_2 = x_5 = 0\,,\ \text{pues } \{1, e_{123}\} \text{ es L.I.}\\
\Rightarrow &x_0 = x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = x_7 = 0
\end{aligned}$$

Luego $\{1, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$ es L.I.
Por lo tanto $\{1, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$ es una $\mathbb{R}$-base de AG(3) □

Definición 2.1.5.

1. *Sea $\langle AG(3)\rangle_j$ la familia de polinomios homogéneos de grado j. Los elementos de $\langle AG(3)\rangle_j$ son llamados j-vectores, donde $j \in \{0, 1, 2, 3\}$*

2. *$\langle AG(3)\rangle_j$ es un subespacio vectorial de AG(3), para todo j = 0,1,2,3.*

Definición 2.1.6.

1. *Los escalares son llamados* 0*-vectores.*

2. *Los vectores son llamados* 1*-vectores.*

3. *Los bivectores son llamados* 2*-vectores.*

4. *Los trivectores son llamados 3-vectores.*

5. *Los elementos de AG(3) son llamados multivectores.*

Proposición 2.1.7. *El álgebra geométrica euclideana tridimensional AG(3) es la suma directa de la familia de polinomios homogéneos de grado j.*

$$AG(3) = \bigoplus_{j=0}^{3} \langle AG(3) \rangle_j$$

Demostración.
Sea $M \in AG(3)$, entonces:

$$M = \underbrace{x_0e_0}_{\in\langle AG(3)\rangle_0} + \underbrace{x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3}_{\in\langle AG(3)\rangle_1} + \underbrace{x_4e_4 + x_5e_5 + x_6e_6}_{\in\langle AG(3)\rangle_2} + \underbrace{x_7e_7}_{\in\langle AG(3)\rangle_3}$$

Luego:

$$AG(3) = \langle AG(3)\rangle_0 + \langle AG(3)\rangle_1 + \langle AG(3)\rangle_2 + \langle AG(3)\rangle_3$$

Sea $M = \sum_{j=0}^{7} x_je_j = 0 \in AG(3)$ si y solo si $x_j = 0$, $\forall j$

$$\begin{aligned} x_0e_0 &= 0 \in \langle AG(3)\rangle_0 \\ x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 &= 0 \in \langle AG(3)\rangle_1 \\ x_4e_4 + x_5e_5 + x_6e_6 &= 0 \in \langle AG(3)\rangle_2 \\ x_7e_7 &= 0 \in \langle AG(3)\rangle_3 \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$AG(3) = \bigoplus_{j=0}^{3} \langle AG(3) \rangle_j$$

□

Observación 2.1.8.

1. *La proposición 2.1.7 nos dice que todo elemento M de AG(3), se escribe de manera única como suma de j-vectores, es decir:*

$$M = \underbrace{M_0}_{\textit{0-vector}} + \underbrace{M_1}_{\textit{1-vector}} + \underbrace{M_2}_{\textit{2-vector}} + \underbrace{M_3}_{\textit{3-vector}}$$

2. *Sea $M \in AG(3)$, entonces:*

$$M = \underbrace{\underbrace{x_0e_0}_{\textit{0-vector}}}_{\in\langle AG(3)\rangle_0} + \underbrace{\underbrace{x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3}_{\textit{1-vector}}}_{\in\langle AG(3)\rangle_1} + \underbrace{\underbrace{x_4e_4 + x_5e_5 + x_6e_6}_{\textit{2-vector}}}_{\in\langle AG(3)\rangle_2} + \underbrace{\underbrace{x_7e_7}_{\textit{3-vector}}}_{\in\langle AG(3)\rangle_3}$$

$x_j \in \mathbb{R}$, *donde* $j \in \{0, 1, 2, 3\}$

Definición 2.1.9.

1. *Todo multivector $M \in AG(3)$ se descompone como suma de j-vectores, es decir:*

$$M = \langle M\rangle_0 + \langle M\rangle_1 + \langle M\rangle_2 + \langle M\rangle_3$$

Donde $\langle M\rangle_j$ es llamado la parte j-vector de M,donde $j \in \{0, 1, 2, 3\}$

2. *Si $M = \langle M\rangle_j$, entonces M es homogéneo de grado j, es decir, M es un j-vector.*

Ejemplo 2.1.10. *Sea $M = 2e_6 + 3e_1 - 7e_3 + 6e_4 + 5e_5 + e_2 + 10e_7 + 9$, entonces:*

$\langle M\rangle_0 = 9$ *es llamado la parte 0-vector de M*
$\langle M\rangle_1 = 3e_1 + e_2 - 7e_3$ *es llamado la parte 1-vector de M*
$\langle M\rangle_2 = 6e_4 + 5e_5 + 2e_6$ *es llamado la parte 2-vector de M*
$\langle M\rangle_3 = 10e_7$ *es llamado la parte 3-vector de M*

2.2. Subálgebras y Subespacios de AG(3)

Las subálgebras de AG(3) pueden ser conmutativas y no conmutativas y dependerá de los subespacios vectoriales de AG(3). Algunos subespacios vectoriales $\langle AG(3)\rangle_j$ de AG(3) son isomorfos como espacios vectoriales a espacios conocidos, por ello es más fácil la comprensión de esta nueva teoría.

Proposición 2.2.1.

1. $\langle AG(3)\rangle_0 \oplus \langle AG(3)\rangle_3$ *es una subálgebra conmutativa de AG(3).*

2. $\langle AG(3)\rangle_0 \oplus \langle AG(3)\rangle_2$ *es una subálgebra no conmutativa de AG(3).*

Demostración. (1)
Sea $M, N \in \langle AG(3)\rangle_0 \oplus \langle AG(3)\rangle_3$, entonces:

$$M = a_0e_0 + a_7e_7,\ \textit{donde}\ a_0, e_7 \in \mathbb{R}$$
$$N = b_0e_0 + b_7e_7,\ \textit{donde}\ b_0, b_7 \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow MN &= (a_0e_0 + a_7e_7)(b_0e_0 + b_7e_7)\\
&= a_0b_0e_0e_0 + a_0b_7e_0e_7 + a_7b_0e_7e_0 + a_7b_7e_7e_7\\
&= a_0b_0e_0 + a_0b_7e_7 + a_7b_0e_7 + a_7b_7(-1), \;\text{ pues } e_0 = 1, e_7e_7 = -1\\
&= a_0b_0e_0 + a_0b_7e_7 + a_7b_0e_7 - a_7b_7e_0\\
\Rightarrow MN &= \underbrace{(a_0b_0 - a_7b_7)}_{a\in\mathbb{R}} e_0 + \underbrace{(a_0b_7 + a_7b_0)}_{b\in\mathbb{R}} e_7\\
\Rightarrow MN &= ae_0 + be_7,\; a, b \in \mathbb{R} \qquad (2.9)\\
\Rightarrow MN &\in \langle AG(3)\rangle_0 \oplus \langle AG(3)\rangle_3
\end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}
NM &= (b_0e_0 + b_7e_7)(a_0e_0 + a_7e_7)\\
&= (b_0a_0e_0e_0 + b_0a_7e_0e_7 + b_7a_0e_7e_0 + b_7a_7e_7e_7)\\
&= b_0a_0e_0 + b_0a_7e_7 + b_7a_0e_7 + b_7a_7(-1)\\
&= b_0a_0e_0 + b_0a_7e_7 + b_7a_0e_7 - b_7a_7e_0\\
&= \underbrace{(b_0a_0 - b_7a_7)}_{a\in\mathbb{R}} e_0 + \underbrace{(b_0a_7 + b_7a_0)}_{b\in\mathbb{R}} e_7\\
\Rightarrow NM &= ae_0 + be_7,\; a, b \in \mathbb{R} \qquad (2.10)\\
\Rightarrow NM &\in \langle AG(3)\rangle_0 \oplus \langle AG(3)\rangle_3
\end{aligned}$$

De (2.9) y (2.10) tenemos: $MN = NM$

Por lo tanto $\langle AG(3)\rangle_0 \oplus \langle AG(3)\rangle_3$ es subálgebra conmutativa de AG(3). □

Demostración. (2)
Sea $M, N \in \langle AG(3)\rangle_0 \oplus \langle AG(3)\rangle_2$, entonces:

$$\begin{aligned}
M &= a_0e_0 + a_4e_4 + a_5e_5 + a_6e_6;\; \textit{donde } a_0, a_4, a_5, a_6 \in \mathbb{R}\\
N &= b_0e_0 + b_4e_4 + b_5e_5 + b_6e_6;\; \textit{donde } b_0, b_4, b_5, b_6 \in \mathbb{R}\\
\Rightarrow MN &= (a_0e_0 + a_4e_4 + a_5e_5 + a_6e_6)(b_0e_0 + b_4e_4 + b_5e_5 + b_6e_6)\\
&= a_0b_0e_0e_0 + a_0b_4e_0e_4 + a_0b_5e_0e_5 + a_0b_6e_0e_6 + a_4b_0e_4e_0 + a_4b_4e_4e_4 + a_4b_5e_4e_5\\
&\quad + a_4b_6e_4e_6 + a_5b_0e_5e_0 + a_5b_4e_5e_4 + a_5b_5e_5e_5 + a_5b_6e_5e_6 + a_6b_0e_6e_0 + a_6b_4e_6e_4\\
&\quad + a_6b_5e_6e_5 + a_6b_6e_6e_6\\
&= a_0b_0e_0 + a_0b_4e_4 + a_0b_5e_5 + a_0b_6e_6 + a_4b_0e_4 + a_4b_4(-e_0) + a_4b_5(-e_6)\\
&\quad + a_4b_6(e_5) + a_5b_0e_5 + a_5b_4(e_6) + a_5b_5(-e_0) + a_5b_6(-e_4) + a_6b_0e_6\\
&\quad + a_6b_4(-e_5) + a_6b_5(e_4) + a_6b_6(-e_0)\\
\Rightarrow MN &= (a_0b_0 - a_4b_4 - a_5b_5 - a_6b_6)e_0 + (a_0b_4 + a_4b_0 - a_5b_6 + a_6b_5)e_4\\
&\quad + (a_0b_5 + a_4b_6 + a_5b_0 - a_6b_4)e_5 + (a_0b_6 - a_4b_5 + a_5b_4 + a_6b_0)e_6 \qquad (2.11)\\
\Rightarrow MN &\in \langle AG(3)\rangle_0 \oplus \langle AG(3)\rangle_2
\end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}
NM &= (b_0e_0 + b_4e_4 + b_5e_5 + b_6e_6)(a_0e_0 + a_4e_4 + a_5e_5 + a_6e_6)\\
&= b_0a_0e_0e_0 + b_0a_4e_0e_4 + b_0a_5e_0e_5 + b_0a_6e_0e_6 + b_4a_0e_4e_0 + b_4a_4e_4e_4 + b_4a_5e_4e_5\\
&+ b_4a_6e_4e_6 + b_5a_0e_5e_0 + b_5a_4e_5e_4 + b_5a_5e_5e_5 + b_5a_6e_5e_6 + b_6a_0e_6e_0 + b_6a_4e_6e_4\\
&+ b_6a_5e_6e_5 + b_6a_6e_6e_6\\
&= b_0a_0e_0 + b_0a_4e_4 + b_0a_5e_5 + b_0a_6e_6 + b_4a_0e_4 + b_4a_4(-e_0) + b_4a_5(-e_6)\\
&+ b_4a_6(e_5) + b_5a_0e_5 + b_5a_4(e_6) + b_5a_5(-e_0) + b_5a_6(-e_4) + b_6a_0e_6\\
&+ b_6a_4(-e_5) + b_6a_5(e_4) + b_6a_6(-e_0)\\
\Rightarrow NM &= (b_0a_0 - b_4a_4 - b_5a_5 - b_6a_6)e_0 + (b_0a_4 + b_4a_0 - b_5a_6 + b_6a_5)e_4\\
&+ (b_0a_5 + b_4a_6 + b_5a_0 - b_6a_4)e_5 + (b_0a_6 - b_4a_5 + b_5a_4 + b_6a_0)e_6 \qquad (2.12)\\
\Rightarrow NM &\in \langle AG(3)\rangle_0 \oplus \langle AG(3)\rangle_2
\end{aligned}$$

De (2.11) y (2.12) tenemos: $MN \neq NM$
Por lo tanto $\langle AG(3)\rangle_0 \oplus \langle AG(3)\rangle_2$ es un subálgebra no conmutativa de AG(3).

□

Proposición 2.2.2. *Tenemos los siguientes isomorfismos como $\mathbb{R}$-espacios vectoriales:*

1. *El subespacio vectorial $\langle AG(3)\rangle_0$ es isomorfo a $\mathbb{R}$ y el subespacio vectorial $\langle AG(3)\rangle_3$ es isomorfo a $\mathbb{R}e_{123}$:*

$$\langle AG(3)\rangle_0 \cong \mathbb{R} \quad y \quad \langle AG(3)\rangle_3 \cong \mathbb{R}e_{123}$$

2. *El subespacio vectorial $\langle AG(3)\rangle_1$ es isomorfo a $\mathbb{R}^3$:*

$$\langle AG(3)\rangle_1 \quad \cong \quad \mathbb{R}^3$$

Es un isomorfismo natural, en lo que sigue identificaremos estos dos $\mathbb{R}$-espacios vectoriales.

3. *Entre $\mathbb{C}$ (Complejos) y la subálgebra conmutativa de AG(3), hay un isomorfismo natural :*

$$\mathbb{C} \cong \langle AG(3)\rangle_0 \oplus \langle AG(3)\rangle_3$$

En lo que sigue identificaremos estas dos $\mathbb{R}$-álgebras conmutativas.

4. *Entre $\mathbb{H}$ (Cuaterniones) y la subálgebra no conmutativa de AG(3), hay un isomorfismo natural :*

$$\mathbb{H} \cong \langle AG(3)\rangle_0 \oplus \langle AG(3)\rangle_2$$

Demostración. (2)
Probaremos que: $\langle AG(3)\rangle_1$ es isomorfo a $\mathbb{R}^3$
Definimos:

$$\begin{aligned}
\varphi : \mathbb{R}^3 &\to \langle AG(3)\rangle_1\\
(a, b, c) &\mapsto \varphi(a, b, c) = ae_1 + be_2 + ce_3
\end{aligned}$$

- φ es lineal.
  En efecto:
  Sea $(a, b, c), (m, n, p) \in \mathbb{R}^3$, donde $a, b, c, m, n, p,\ \alpha \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\varphi((a, b, c) + (m, n, p)) &= \varphi(a + m, b + n, c + p) \\
&= (a + m)e_1 + (b + n)e_2 + (c + p)e_3 \\
&= ae_1 + me_1 + be_2 + ne_2 + ce_3 + pe_3 \\
&= \varphi(a, b, c) + \varphi(m, n, p) \\
\Rightarrow \varphi((a, b, c) + (m, n, p)) &= \varphi(a, b, c) + \varphi(m, n, p)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi(\alpha(a, b, c)) &= \varphi(\alpha a + \alpha b + \alpha c) \\
&= \alpha ae_1 + \alpha be_2 + \alpha ce_3 \\
&= \alpha(ae_1 + be_2 + ce_3) \\
&= \alpha\varphi(a, b, c)
\end{aligned}$$

  Luego φ es lineal.

- φ es inyectiva.
  En efecto:
  Sea $(a, b, c), (m, n, p) \in \mathbb{R}^3$, entonces:

$$\begin{aligned}
\varphi(a, b, c) &= \varphi(m, n, p) \\
ae_1 + be_2 + ce_3 &= me_1 + ne_2 + pe_3
\end{aligned}$$

$$\begin{gathered}
\Rightarrow a = m, b = n, c = p \\
\Rightarrow (a, b, c) = (m, n, p)
\end{gathered}$$

  Luego φ es inyectiva.

- φ es sobreyectiva.
  En efecto: Si $M \in \langle AG(3)\rangle_1$, consideramos $M = ae_1 + be_2 + ce_3$
  Entonces $M = \varphi(a, b, c)$
  Luego φ es sobreyectiva

Por lo tanto $\langle AG(3)\rangle_1 \cong \mathbb{R}^3$ □

Demostración. (3)
Probaremos que $\langle AG(3)\rangle_0 \oplus \langle AG(3)\rangle_3 \cong \mathbb{C}$
Definimos:

$$\begin{aligned}
f : \langle AG(3)\rangle_0 \oplus \langle AG(3)\rangle_3 &\longrightarrow \mathbb{C} \\
a + be_{123} &\longmapsto a + b\imath
\end{aligned}$$

- Veamos que f es lineal.
  En efecto:
  Sean $a + be_{123}, a_1 + b_1 e_{123} \in \langle AG(3)\rangle_0 \oplus \langle AG(3)\rangle_3$, donde $a, b, a_1, b_1, c \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f((a + be_{123}) + (a_1 + b_1 e_{123})) &= f((a + a_1) + (be_{123} + b_1 e_{123})) \\ &= f((a + a_1) + (b + b_1)e_{123}) \\ &= (a + a_1) + (b + b_1)\imath \\ &= (a + b\imath) + (a_1 + b_1\imath) \\ &= f(a + be_{123}) + f(a_1 + b_1 e_{123}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(c(a + be_{123})) &= f(ca + cbe_{123}) \\ &= ca + cb\imath \\ &= c(a + b\imath) \\ &= cf(a + be_{123}) \end{aligned}$$

  Luego f es lineal.

- Veamos que f es inyectiva:
  En efecto:

$$\begin{aligned} \text{Sea } a + be_{123} \in \mathrm{Nu}(f) &\Rightarrow f(a + be_{123}) = 0 = 0 + 0\imath \\ &\Rightarrow a + b\imath = 0 + 0\imath \\ &\Leftrightarrow a = b = 0 \\ &\Rightarrow \mathrm{Nu}(f) = \{0\} \end{aligned}$$

  Luego f es inyectiva.

- Veamos que f es sobreyectiva:
  En efecto:
  Sea $a + b\imath \in \mathbb{C}$, consideremos $a + be_{123} \in \langle AG(3)\rangle_0 \oplus \langle AG(3)\rangle_3$
  Entonces $f(a + be_{123}) = a + b\imath$
  Luego f es sobreyectiva

Por lo tanto $\langle AG(3)\rangle_0 \oplus \langle AG(3)\rangle_3 \cong \mathbb{C}$ □

Demostración. (4)
Probaremos que $\langle AG(3)\rangle_0 \oplus \langle AG(3)\rangle_2 \cong \mathbb{H}$

Definimos:

$$\begin{aligned} f : \langle AG(3)\rangle_0 \oplus \langle AG(3)\rangle_2 &\longrightarrow \mathbb{H} \\ a_0 + a_4 e_{12} + a_5 e_{13} + a_6 e_{23} &\longmapsto a_0 + a_4 e_4 + a_5 e_5 + a_6 e_6 \end{aligned}$$

- Veamos que f es lineal.
  En efecto:
  Sea $a_0+a_4e_{12}+a_5e_{13}+a_6e_{23},\ a'_0+a'_4e_{12}+a'_5e_{13}+a'_6e_{23} \in \langle AG(3)\rangle_0 \oplus \langle AG(3)\rangle_2$
  donde $a_0, a_4, a_5, a_6, a'_0, a'_4, a'_5, a'_6, \alpha \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
&f((a_0 + a_4e_{12} + a_5e_{13} + a_6e_{23}) + (a'_0 + a'_4e_{12} + a'_5e_{13} + a'_6e_{23})) = \\
&f((a_0 + a'_0) + (a_4 + a'_4)e_{12} + (a_5 + a'_5)e_{13} + (a_6 + a'_6)e_{23})) = \\
&(a_0 + a'_0) + (a_4 + a'_4)e_4 + (a_5 + a'_5)e_5 + (a_6 + a'_6)e_6) = \\
&(a_0 + a_4e_4 + a_5e_5 + a_6e_6) + (a'_0 + a'_4e_4 + a'_5e_5 + a'_6e_6) = \\
&f(a_0 + a_4e_{12} + a_5e_{13} + a_6e_{23}) + f(a'_0 + a'_4e_{12} + a'_5e_{13} + a'_6e_{23})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(\alpha(a_0 + a_4e_{12} + a_5e_{13} + a_6e_{23}) &= f(\alpha a_0 + \alpha a_4e_{12} + \alpha a_5e_{13} + \alpha a_6e_{23}) \\
&= \alpha a_0 + \alpha a_4e_4 + \alpha a_5e_5 + \alpha a_6e_6 \\
&= \alpha(a_0 + a_4e_4 + a_5e_5 + a_6e_6) \\
&= \alpha f(a_0 + a_4e_{12} + a_5e_{13} + a_6e_{23})
\end{aligned}$$

  Luego f es lineal.

- Veamos que f es inyectiva:
  En efecto:
  Sea $a_0 + a_4e_{12} + a_5e_{13} + a_6e_{23} \in \mathrm{Nu}(f)$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow f(a_0 + a_4e_{12} + a_5e_{13} + a_6e_{23}) = 0 = 0 + 0a_4 + 0a_5 + 0a_6 \\
&\Rightarrow a_0 + a_4e_4 + a_5e_5 + a_6e_6 = 0 + 0a_4 + 0a_5 + 0a_6 \\
&\Leftrightarrow a_0 = a_4 = a_5 = a_6 = 0 \\
&\Rightarrow \mathrm{Nu}(f) = \{0\}
\end{aligned}$$

  Luego f es inyectiva.

- Veamos que f es sobreyectiva:
  En efecto:
  Sea $a_0 + a_4e_4 + a_5e_5 + a_6e_6 \in \mathbb{H}$
  Consideramos $a_0 + a_4e_{12} + a_5e_{13} + a_6e_{23} \in \langle AG(3)\rangle_0 \oplus \langle AG(3)\rangle_2$
  Entonces :$f(a_0 + a_4e_{12} + a_5e_{13} + a_6e_{23}) = a_0 + a_4e_4 + a_5e_5 + a_6e_6$
  Luego f es sobreyectiva.

Por lo tanto $\langle AG(3)\rangle_0 \oplus \langle AG(3)\rangle_2 \cong \mathbb{H}$

□

Observación 2.2.3.

1. *Los isomorfismos anteriores nos permiten considerar:*

$$\mathbb{R} \subset \mathbb{C} \subset AG(3), \mathbb{H} \subset AG(3) \text{ y también } \mathbb{R}^3 \subset AG(3)$$

y escribir la siguiente identidad, como $\mathbb{R}$-espacios vectoriales:

$$AG(3) = \mathbb{R}^3 \oplus \mathbb{H} \oplus \mathbb{R}e_{123}$$

2. *Por todo lo hecho en la proposición anterior, es más fácil trabajar con AG(3) debido a que se trabaja con espacios conocidos $\mathbb{R}, \mathbb{R}^3, \mathbb{C}$ y $\mathbb{H}$.*

Definición 2.2.4. *Subálgebras de AG(3)*

1. *El subálgebra par de AG(3) esta definido por:*

$$AG(3)^+ = \langle AG(3) \rangle_0 \oplus \langle AG(3) \rangle_2$$

2. *El subálgebra impar de AG(3) esta definido por:*

$$AG(3)^- = \langle AG(3) \rangle_1 \oplus \langle AG(3) \rangle_3$$

2.3. Multivectores

2.3.1. Propiedades Generales

Definición 2.3.1. *Sean los mulivectores $M, N, P \in AG(3)$, se cumple: (Ver[4])*

1. $M + N = N + M$
2. *(M+N)+P= M+(N+P)*
3. *(MN)P= M(NP)*
4. $(M + N)P = MP + NP$
   $M(N + P) = MN + MP$
5. $\exists! 0 \in \mathbb{R} / M + 0 = M$
6. $\exists! 1 \in \mathbb{R} / 1M = M$
7. $\exists! -M / M + (-M) = 0$

Definición 2.3.2. *Sea $M \in AG(3)$. La inversa de M, si esta existe, es denotado por M^{-1} o $\dfrac{1}{M}$ y está definida por la ecuación:*

$$M^{-1}M = 1 = MM^{-1}$$

Observación 2.3.3.

1. *Nosotros podemos dividir cualquier multivetor N por M de dos maneras:*
   - *Por la izquierda:* $M^{-1}N = \dfrac{1}{M}N$
   - *Por la derecha:* $NM^{-1} = N\dfrac{1}{M}$

2.3.2. Producto Exterior y Producto Interior de Multivectores

Definiremos el producto interior y exterior entre multivectores, usando los subespacios vectoriales de AG(3).

Definición 2.3.4. *Dados los multivectores $M_j \in \langle AG(3)\rangle_j$, $N_k \in \langle AG(3)\rangle_k$ y $M \in AG(3)$. (Ver[10])*

1. $M_j \downarrow N_k = \langle M_j N_k\rangle_{|j-k|}$ *si* $j, k \neq 0$ *y cero de otro modo.*
   es llamado **producto interior** *del j-vector M_j con el k-vector N_k.*

2. $M_j \uparrow N_k = \langle M_j N_k\rangle_{j+k}$ *si* $j + k \leq 3$ *y cero de otro modo.*
   es llamado **producto exterior** *del j-vector M_j con el k-vector N_k.*

3. $M_j \cdot N_j = \langle M_j N_j\rangle_0$ *es llamado* **producto escalar** *de los j-vectores M_j y N_j.*

4. $\|M_j\| = \sqrt{|M_j \downarrow M_j|}$ *es llamada* **j-magnitud** *euclideana de M_j.*

5. $\|M\|^2 = \sum_{j=0}^{3} \|M_j\|^2 = \|M_0\|^2 + \|M_1\|^2 + \|M_2\|^2 + \|M_3\|^2$ *es llamada la magnitud euclideana del multivector M.*

6. *Diremos que M_j y N_k son* **ortogonales** *si* $M_j \downarrow N_k = 0$

7. *Diremos que M_j y N_k son* **colineales** *si* $M_j \uparrow N_k = 0$

Observación 2.3.5.

1. *El producto interior coincide con el producto escalar cuando $j = k$, donde $j, k \neq 0$*
   Esto no se cumple cuando $j = 0$ ó $k = 0$, pues $8 \downarrow 4 = 0$ *y* $8 \cdot 4 = 32$.

Proposición 2.3.6. *Si* $M_j \in \langle AG(3)\rangle_j$, *entonces* $M_j \downarrow M_j = M_j M_j \in \mathbb{R}$ *y*

$$|M_0|^2 = M_0^2,\ \|M_1\|^2 = M_1^2,\ \|M_2\|^2 = M_2^2,\ \|M_3\|^2 = M_3^2$$

Demostración.
Como $M_j \in \langle AG(3)\rangle_j,\ j = 0, 1, 2, 3$

- Si $j = 0 : M_0 \in \langle AG(3)\rangle_0$, entonces $M_0 = x_0$

$$\begin{aligned} \Rightarrow M_0 \downarrow M_0 &= \langle M_0 M_0\rangle_0 \\ &= x_0^2 \\ \Rightarrow M_0 \downarrow M_0 &= M_0 M_0 \end{aligned}$$

  Luego: $|M_0|^2 = M_0^2$

- Si $j = 1 : M_1 \in \langle AG(3)\rangle_1$, entonces $M_1 = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$

$$\begin{aligned} \Rightarrow M_1 \downarrow M_1 &= \langle M_1 M_1\rangle_0 \\ &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \\ \Rightarrow M_1 \downarrow M_1 &= M_1 M_1 \end{aligned}$$

  Luego: $\|M_1\|^2 = |M_1 \downarrow M_1| = |\langle M_1 M_1\rangle_0| = M_1 M_1 = M_1^2$

- Si $j = 2 : M_2 \in \langle AG(3)\rangle_2$, entonces $M_2 = x_4e_4 + x_5e_5 + x_6e_6$

$$\begin{aligned} \Rightarrow M_2 \downarrow M_2 &= \langle M_2 M_2\rangle_0 \\ &= -(x_4^2 + x_5^2 + x_6^2) \\ \Rightarrow M_2 \downarrow M_2 &= M_2 M_2 \end{aligned}$$

  Luego: $\|M_2\|^2 = |M_2 \downarrow M_2| = |\langle M_2 M_2\rangle_0| = M_2 M_2 = M_2^2$

- Si $j = 3 : M_3 \in \langle AG(3)\rangle_3$, entonces $M_3 = x_7e_7$

$$\begin{aligned} \Rightarrow M_3 \downarrow M_3 &= \langle M_3 M_3\rangle_0 \\ &= -x_7^2 \\ \Rightarrow M_3 \downarrow M_3 &= M_3 M_3 \end{aligned}$$

  Luego: $\|M_3\|^2 = |M_3 \downarrow M_3| = |\langle M_3 M_3\rangle_0| = M_3 M_3 = M_3^2$
  Por lo tanto: $M_j \downarrow M_j = M_j M_j$, j = 0, 1, 2, 3

□

Ejercicio 2.3.7. *Todo $x \in \mathbb{R}^3$ tiene inverso multiplicativo dado por* $x^{-1} = \dfrac{x}{|x|^2}$

Demostración. :

$$\begin{aligned} xx^{-1} &= 1 \\ xxx^{-1} &= x \\ x^2x^{-1} &= x \\ |x|^2x^{-1} &= x \\ \Rightarrow x^{-1} &= \frac{x}{|x|^2} \end{aligned}$$

□

2.3.3. Producto Geométrico entre Multivectores

Proposición 2.3.8.

1. *El producto geométrico de un 0-vector α y un 1-vector x es:*

$$\alpha x = \alpha \uparrow x \tag{2.13}$$

2. *El producto geométrico de un 0-vector α y un 2-vector B es:*

$$\alpha B = \alpha \uparrow B \tag{2.14}$$

3. *El producto geométrico de dos 1-vectores x e y es:*

$$xy = x \downarrow y + x \uparrow y \tag{2.15}$$

4. *El producto geométrico de un 1-vector x y un 2-vector B es:*

$$xB = x \downarrow B + x \uparrow B \tag{2.16}$$

5. *El producto geométrico de un 1-vector x y un 3-vector T es:*

$$xT = x \downarrow T \tag{2.17}$$

6. *El producto geométrico de un 2-vector B y un 3-vector T es:*

$$BT = B \downarrow T \tag{2.18}$$

7. *El producto geométrico de dos 3-vectores T_1 y T_2 es:*

$$T_1T_2 = T_1 \downarrow T_2 \tag{2.19}$$

8. *El producto geométrico de dos 2-vectores B_1 y B_2 es:*

$$B_1B_2 = B_1 \downarrow B_2 + B_1 \uparrow B_2 + \langle B_1B_2\rangle_2 \tag{2.20}$$

Demostración. (1)
Sea α un 0-vector y $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$ un 1-vector, donde $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \alpha x &= \alpha(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3) \\ &= \underbrace{(\alpha x_1)e_1 + (\alpha x_2)e_2 + (\alpha x_3)e_3}_{\text{1-vector}} \end{aligned}$$

$$\bullet\ \alpha \downarrow x = 0 \tag{2.21}$$

$$\bullet\ \alpha \uparrow x = \langle \alpha x\rangle_{0+1} = \langle \alpha x\rangle_1 = (\alpha x_1)e_1 + (\alpha x_2)e_2 + (\alpha x_3)e_3 \tag{2.22}$$

$$\Rightarrow \alpha x = \alpha \uparrow x$$

□

De manera análoga tenemos:

$$x\alpha = x \uparrow \alpha$$

En efecto:

$$\begin{aligned} x\alpha &= (x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3)\alpha \\ &= \underbrace{(\alpha x_1)e_1 + (\alpha x_2)e_2 + (\alpha x_3)e_3}_{\text{1-vector}} \end{aligned}$$

$$\bullet\ x \downarrow \alpha = 0 \tag{2.23}$$

$$\bullet\ x \uparrow \alpha = \langle x\alpha\rangle_{1+0} = \langle x\alpha\rangle_1 = (\alpha x_1)e_1 + (\alpha x_2)e_2 + (\alpha x_3)e_3 \tag{2.24}$$

$$\Rightarrow x\alpha = x \uparrow \alpha$$

Observaciones 2.3.9.

1. *El producto geométrico de un 0-vector y un 1-vector es un 1-vector.*
2. *De* (2.21) *y* (2.23) *tenemos:* $\alpha \downarrow x = x \downarrow \alpha = 0$
3. *De* (2.22) *y* (2.24) *tenemos:* $\alpha \uparrow x = x \uparrow \alpha$
4. *Por todo lo mencionado anteriormente tenemos* $\alpha x = x\alpha$

Demostración. (2)
Sea α un 0-vector y $B = x_4e_4 + x_5e_5 + x_6e_6$ un 2-vector, donde $x_4, x_5, x_6 \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\alpha B &= \alpha(x_4e_4 + x_5e_5 + x_6e_6)\\ &= \underbrace{(\alpha x_4)e_4 + (\alpha x_5)e_5 + (\alpha x_6)e_6}_{\text{2-vector}}\end{aligned}$$

$$\bullet\ \alpha \downarrow B = 0 \tag{2.25}$$

$$\bullet\ \alpha \uparrow B = \langle \alpha B\rangle_{0+2} = \langle \alpha B\rangle_2 = (\alpha x_4)e_4 + (\alpha x_5)e_5 + (\alpha x_6)e_6 \tag{2.26}$$

$$\Rightarrow \alpha B = \alpha \uparrow B$$

□

De manera análoga tenemos:

$$B\alpha = B \uparrow \alpha$$

En efecto:

$$\begin{aligned}B\alpha &= (x_4e_4 + x_5e_5 + x_6e_6)\alpha\\ &= \underbrace{(\alpha x_4)e_4 + (\alpha x_5)e_5 + (\alpha x_6)e_6}_{\text{2-vector}}\end{aligned}$$

$$\bullet\ B \downarrow \alpha = 0 \tag{2.27}$$

$$\bullet\ B \uparrow \alpha = \langle B\alpha\rangle_{2+0} = \langle B\alpha\rangle_2 = (\alpha x_4)e_4 + (\alpha x_5)e_5 + (\alpha x_6)e_6 \tag{2.28}$$

$$\Rightarrow B\alpha = B \uparrow \alpha$$

Observaciones 2.3.10.

1. *El producto geométrico de un 0-vector y un 2-vector es un 2-vector.*
2. *De* (2.25) *y* (2.27) *tenemos:* $\alpha \downarrow B = B \downarrow \alpha = 0$
3. *De* (2.26) *y* (2.28) *tenemos:* $\alpha \uparrow B = B \uparrow \alpha$
4. *Por todo lo mencionado anteriormente tenemos* $\alpha B = B\alpha$

Demostración. (3)
Sea $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$ y $y = y_1e_1 + y_2e_2 + y_3e_3$ dos 1-vectores

$$\begin{aligned}
xy &= (x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3)(y_1e_1 + y_2e_2 + y_3e_3)\\
&= x_1e_1y_1e_1 + x_1e_1y_2e_2 + x_1e_1y_3e_3 + x_2e_2y_1e_1 + x_2e_2y_2e_2 + x_2e_2y_3e_3\\
&\quad + x_3e_3y_1e_1 + x_3e_3y_2e_2 + x_3e_3y_3e_3\\
&= x_1y_1\underbrace{e_1e_1}_{1} + x_1y_2e_1e_2 + x_1y_3e_1e_3 + x_2y_1e_2e_1 + x_2y_2\underbrace{e_2e_2}_{1} + x_2y_3e_2e_3\\
&\quad + x_3y_1e_3e_1 + x_3y_2e_3e_2 + x_3y_3\underbrace{e_3e_3}_{1}\\
&= x_1y_1 + x_1y_2e_1e_2 + x_1y_3e_1e_3 + x_2y_1(-e_1e_2) + x_2y_2 + x_2y_3e_2e_3\\
&\quad + x_3y_1(-e_1e_3) + x_3y_2(-e_2e_3) + x_3y_3\\
&= x_1y_1 + x_1y_2e_4 + x_1y_3e_5 + x_2y_1(-e_4) + x_2y_2 + x_2y_3e_6\\
&\quad + x_3y_1(-e_5) + x_3y_2(-e_6) + x_3y_3\\
xy &= \underbrace{x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3}_{\text{0-vector}} + \underbrace{(x_1y_2 - x_2y_1)e_4 + (x_1y_3 - x_3y_1)e_5 + (x_2y_3 - x_3y_2)e_6}_{\text{2-vector}}
\end{aligned}$$

$$\bullet\ x \downarrow y = \langle xy\rangle_{|1-1|} = \langle xy\rangle_0 = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 \tag{2.29}$$

$$\bullet\ x \uparrow y = \langle xy\rangle_{1+1} = \langle xy\rangle_2 = (x_1y_2 - x_2y_1)e_4 + (x_1y_3 - x_3y_1)e_5 + (x_2y_3 - x_3y_2)e_6 \tag{2.30}$$

$$\Rightarrow xy = x \downarrow y + x \uparrow y$$

□

De manera análoga tenemos:

$$yx = y \downarrow x + y \uparrow x \tag{2.31}$$

En efecto:

$$\begin{aligned}
yx &= (y_1e_1 + y_2e_2 + y_3e_3)(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3)\\
&= y_1e_1x_1e_1 + y_1e_1x_2e_2 + y_1e_1x_3e_3 + y_2e_2x_1e_1 + y_2e_2x_2e_2 + y_2e_2x_3e_3\\
&\quad + y_3e_3x_1e_1 + y_3e_3x_2e_2 + y_3e_3x_3e_3
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= y_1x_1\underbrace{e_1e_1}_{1} + y_1x_2e_1e_2 + y_1x_3e_1e_3 + y_2x_1e_2e_1 + y_2x_2\underbrace{e_2e_2}_{1} + y_2x_3e_2e_3 \\
&\quad + y_3x_1e_3e_1 + y_3x_2e_3e_2 + y_3x_3\underbrace{e_3e_3}_{1} \\
&= y_1x_1 + y_1x_2e_1e_2 + y_1x_3e_1e_3 + y_2x_1(-e_1e_2) + y_2x_2 + y_2x_3e_2e_3 \\
&\quad + y_3x_1(-e_1e_3) + y_3x_2(-e_2e_3) + y_3x_3 \\
&= y_1x_1 + y_1x_2e_4 + y_1x_3e_5 + y_2x_1(-e_4) + y_2x_2 + y_2x_3e_6 \\
&\quad + y_3x_1(-e_5) + y_3x_2(-e_6) + y_3x_3 \\
yx &= \underbrace{y_1x_1 + y_2x_2 + y_3x_3}_{\text{0-vector}} + \underbrace{(y_1x_2 - y_2x_1)e_4 + (y_1x_3 - y_3x_1)e_5 + (y_2x_3 - y_3x_2)e_6}_{\text{2-vector}}
\end{aligned}
$$

- $$y \downarrow x = \langle yx\rangle_{|1-1|} = \langle yx\rangle_0 = y_1x_1 + y_2x_2 + y_3x_3 \tag{2.32}$$
- $$y \uparrow x = \langle yx\rangle_{1+1} = \langle yx\rangle_2 = (y_1x_2 - y_2x_1)e_4 + (y_1x_3 - y_3x_1) + (y_2x_3 - y_3x_2)e_6 \tag{2.33}$$

$$\Rightarrow yx = y \downarrow x + y \uparrow x$$

Observaciones 2.3.11.

1. *De* (2.29) *y* (2.32) *tenemos:* $x \downarrow y = y \downarrow x$
2. *De* (2.30) *y* (2.33) *tenemos:* $x \uparrow y = -y \uparrow x$
3. *Sumando y restando* (2.15) *y* (2.31) *tenemos:*

$$
\begin{aligned}
x \downarrow y &= \frac{1}{2}(xy + yx) \\
x \uparrow y &= \frac{1}{2}(xy - yx)
\end{aligned}
$$

4. *Por todo lo mencionado anteriormente tenemos* $xy \neq yx$

Demostración. (4)
Sea $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$ un 1-vector y $B = x_4e_4 + x_5e_5 + x_6e_6$ un 2-vector:

$$
\begin{aligned}
xB &= (x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3)(x_4e_4 + x_5e_5 + x_6e_6)\\
&= x_1e_1x_4e_4 + x_1e_1x_5e_5 + x_1e_1x_6e_6 + x_2e_2x_4e_4 + x_2e_2x_5e_5 + x_2e_2x_6e_6\\
&\quad + x_3e_3x_4e_4 + x_3e_3x_5e_5 + x_3e_3x_6e_6\\
&= x_1x_4e_1e_4 + x_1x_5e_1e_5 + x_1x_6e_1e_6 + x_2x_4e_2e_4 + x_2x_5e_2e_5 + x_2x_6e_2e_6\\
&\quad + x_3x_4e_3e_4 + x_3x_5e_3e_5 + x_3x_6e_3e_6\\
&= x_1x_4e_1(e_1e_2) + x_1x_5e_1(e_1e_3) + x_1x_6e_1(e_2e_3) + x_2x_4e_2(e_1e_2) + x_2x_5e_2(e_1e_3)\\
&\quad + x_2x_6e_2(e_2e_3) + x_3x_4e_3(e_1e_2) + x_3x_5e_3(e_1e_3) + x_3x_6e_3(e_2e_3)\\
&= x_1x_4(\underbrace{e_1e_1}_{1})e_2 + x_1x_5(\underbrace{e_1e_1}_{1})e_3 + x_1x_6e_1e_2e_3 + x_2x_4e_2(-e_2e_1) + x_2x_5(e_2e_1)e_3\\
&\quad + x_2x_6(\underbrace{e_2e_2}_{1})e_3 + x_3x_4(e_3e_1)e_2 + x_3x_5e_3(-e_3e_1) + x_3x_6e_3(-e_3e_2)\\
&= x_1x_4e_2 + x_1x_5e_3 + x_1x_6e_1e_2e_3 + x_2x_4\,\underbrace{e_2e_2}_{1}(-e_1) + x_2x_5(-e_1e_2)e_3 + x_2x_6e_3\\
&\quad + x_3x_4(-e_1e_3)e_2 + x_3x_5(\underbrace{e_3e_3}_{1})(-e_1) + x_3x_6(\underbrace{e_3e_3}_{1})(-e_2)\\
&= x_1x_4e_2 + x_1x_5e_3 + x_1x_6e_1e_2e_3 + x_2x_4(-e_1) - x_2x_5e_1e_2e_3 + x_2x_6e_3\\
&\quad + x_3x_4e_1(-e_3e_2) + x_3x_5(-e_1) + x_3x_6(-e_2)\\
&= x_1x_4e_2 + x_1x_5e_3 + x_1x_6e_1e_2e_3 + x_2x_4(-e_1) - x_2x_5e_1e_2e_3 + x_2x_6e_3\\
&\quad + x_3x_4e_1(e_2e_3) + x_3x_5(-e_1) + x_3x_6(-e_2)\\
xB &= \underbrace{(-x_3x_5 - x_2x_4)e_1 + (x_1x_4 - x_3x_6)e_2 + (x_1x_5 + x_2x_6)e_3}_{\text{1-vector}} + \underbrace{(x_1x_6 - x_2x_5 + x_3x_4)e_1e_2e_3}_{\text{3-vector}}
\end{aligned}
$$

- $x \downarrow B = \langle xB\rangle_{|1-2|} = \langle xB\rangle_1 = (-x_3x_5 - x_2x_4)e_1 + (x_1x_4 - x_3x_6)e_2 + (x_1x_5 + x_2x_6)e_3 \quad (2.34)$

- $x \uparrow B = \langle xB\rangle_{1+2} = \langle xB\rangle_3 = (x_1x_6 - x_2x_5 + x_3x_4)e_1e_2e_3 \quad (2.35)$

$$\Rightarrow xB = x \downarrow B + x \uparrow B$$

□

De manera análoga tenemos:

$$Bx = B \downarrow x + B \uparrow x \tag{2.36}$$

En efecto:

$$
\begin{aligned}
Bx &= (x_4e_4 + x_5e_5 + x_6e_6)(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3)\\
&= x_4e_4x_1e_1 + x_4e_4x_2e_2 + x_4e_4x_3e_3 + x_5e_5x_1e_1 + x_5e_5x_2e_2 + x_5e_5x_3e_3\\
&\quad + x_6e_6x_1e_1 + x_6e_6x_2e_2 + x_6e_6x_3e_3\\
&= x_4x_1e_4e_1 + x_4x_2e_4e_2 + x_4x_3e_4e_3 + x_5x_1e_5e_1 + x_5x_2e_5e_2 + x_5x_3e_5e_3\\
&\quad + x_6x_1e_6e_1 + x_6x_2e_6e_2 + x_6x_3e_6e_3\\
&= x_4x_1(e_1e_2)e_1 + x_4x_2(e_1e_2)e_2 + x_4x_3(e_1e_2)e_3 + x_5x_1(e_1e_3)e_1 + x_5x_2(e_1e_3)e_2\\
&\quad + x_5x_3(e_1e_3)e_3 + x_6x_1(e_2e_3)e_1 + x_6x_2(e_2e_3)e_2 + x_6x_3(e_2e_3)e_3\\
&= x_4x_1(-e_2e_1)e_1 + x_4x_2e_1(\underbrace{e_2e_2}_{1}) + x_4x_3e_1e_2e_3 + x_5x_1(-e_3e_1)e_1 + x_5x_2e_1(e_3e_2)\\
&\quad + x_5x_3e_1(\underbrace{e_3e_3}_{1}) + x_6x_1e_2(e_3e_1) + x_6x_2(-e_3e_2)e_2 + x_6x_3e_2(\underbrace{e_3e_3}_{1})\\
&= x_4x_1(-e_2)(\underbrace{e_1e_1}_{1}) + x_4x_2e_1 + x_4x_3e_1e_2e_3 + x_5x_1(-e_3)(\underbrace{e_1e_1}_{1}) + x_5x_2e_1(-e_2e_3) + x_5x_3e_1\\
&\quad + x_6x_1e_2(-e_1e_3) + x_6x_2(-e_3)(\underbrace{e_2e_2}_{1}) + x_6x_3e_2\\
&= x_4x_1(-e_2) + x_4x_2e_1 + x_4x_3e_1e_2e_3 + x_5x_1(-e_3) - x_5x_2e_1e_2e_3 + x_5x_3e_1\\
&\quad + x_6x_1(-e_2e_1)e_3 + x_6x_2(-e_3) + x_6x_3e_2\\
&= x_4x_1(-e_2) + x_4x_2e_1 + x_4x_3e_1e_2e_3 + x_5x_1(-e_3) - x_5x_2e_1e_2e_3 + x_5x_3e_1\\
&\quad + x_6x_1(e_1e_2)e_3 + x_6x_2(-e_3) + x_6x_3e_2\\
Bx &= \underbrace{(x_5x_3 + x_4x_2)e_1 + (x_6x_3 - x_4x_1)e_2 + (-x_6x_2 - x_5x_1)e_3}_{\text{1-vector}} + \underbrace{(x_6x_1 - x_5x_2 + x_4x_3)e_1e_2e_3}_{\text{3-vector}}
\end{aligned}
$$

- $B \downarrow x = \langle Bx\rangle_{|2-1|} = \langle Bx\rangle_1 = (x_5x_3 + x_4x_2)e_1 + (x_6x_3 - x_4x_1)e_2 + (-x_6x_2 - x_5x_1)e_3 \quad (2.37)$

- $B \uparrow x = \langle Bx\rangle_{2+1} = \langle Bx\rangle_3 = (x_6x_1 - x_5x_2 + x_4x_3)e_1e_2e_3 \quad (2.38)$

$$\Rightarrow Bx = B \downarrow x + B \uparrow x$$

Observaciones 2.3.12.

1. *De* (2.34) *y* (2.37) *tenemos:* $x \downarrow B = -B \downarrow x$
2. *De* (2.35) *y* (2.38) *tenemos:* $x \uparrow B = B \uparrow x$

3. *Sumando y restando* (2.16) *y* (2.36) *tenemos:*

$$x \downarrow B = \frac{1}{2}(xB - Bx)$$
$$x \uparrow B = \frac{1}{2}(xB + Bx)$$

4. *Por todo lo mencionado anteriormente tenemos* $xB \neq Bx$

Demostración. (5)
Sea $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$ un 1-vector y $T = x_7e_7$ un 3-vector

$$\begin{aligned}
xT &= (x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3)(x_7e_7) \\
&= x_1e_1x_7e_7 + x_2e_2x_7e_7 + x_3e_3x_7e_7 \\
&= x_1x_7e_1e_7 + x_2x_7e_2e_7 + x_3x_7e_3e_7 \\
&= x_1x_7e_1e_1e_2e_3 + x_2x_7e_2e_1e_2e_3 + x_3x_7e_3e_1e_2e_3 \\
&= x_1x_7(\underbrace{e_1e_1}_{1})e_2e_3 + x_2x_7e_2(e_1e_2)e_3 + x_3x_7(e_3e_1)(e_2e_3) \\
&= x_1x_7e_2e_3 + x_2x_7e_2(-e_2e_1)e_3 + x_3x_7(-e_1e_3)(-e_3e_2) \\
&= x_1x_7e_2e_3 - x_2x_7(\underbrace{e_2e_2}_{1})e_1e_3 + x_3x_7e_1(\underbrace{e_3e_3}_{1})e_2 \\
&= x_1x_7e_2e_3 - x_2x_7e_1e_3 + x_3x_7e_1e_2 \\
&= x_1x_7e_6 - x_2x_7e_5 + x_3x_7e_4 \\
xT &= \underbrace{x_3x_7e_4 - x_2x_7e_5 + x_1x_7e_6}_{\text{2-vector}}
\end{aligned}$$

$$\bullet\ x \downarrow T = \langle xT \rangle_{|1-3|} = \langle xT \rangle_2 = x_3x_7e_4 - x_2e_7e_5 + x_1x_7e_6 \tag{2.39}$$

$$\bullet\ x \uparrow T = \langle xT \rangle_{1+3} = \langle xT \rangle_4 = 0 \tag{2.40}$$

$$\Rightarrow xT = x \downarrow T$$

□

De manera análoga tenemos:

$$Tx = T \downarrow x$$

En efecto:

$$
\begin{aligned}
Tx &= (x_7e_7)(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3) \\
&= x_7e_7x_1e_1 + x_7e_7x_2e_2 + x_7e_7x_3e_3 \\
&= x_7x_1e_7e_1 + x_7x_2e_7e_2 + x_7x_3e_7e_3 \\
&= x_7x_1e_1e_2e_3e_1 + x_7x_2e_1e_2e_3e_2 + x_7x_3e_1e_2e_3e_3 \\
&= x_7x_1(-e_2e_1)(-e_1e_3) + x_7x_2e_1e_2(-e_2e_3) + x_7x_3e_1e_2(\underbrace{e_3e_3}_{1}) \\
&= x_7x_1e_2(\underbrace{e_1e_1}_{1})e_3 - x_7x_2e_1(\underbrace{e_2e_2}_{1})e_3 + x_7x_3e_1e_2 \\
&= x_7x_1e_2e_3 - x_7x_2e_1e_3 + x_7x_3e_1e_2 \\
&= x_7x_1e_6 - x_7x_2e_5 + x_7x_3e_4 \\
Tx &= \underbrace{x_3x_7e_4 - x_7x_2e_5 + x_7x_1e_6}_{\text{2-vector}}
\end{aligned}
$$

$$\bullet\ T \downarrow x = \langle Tx \rangle_{|3-1|} = \langle Tx \rangle_2 = x_3x_7e_4 - x_7x_2e_5 + x_7x_1e_6 \tag{2.41}$$

$$\bullet\ T \uparrow x = \langle Tx \rangle_{3+1} = \langle Tx \rangle_4 = 0 \tag{2.42}$$

$$\Rightarrow Tx = T \downarrow x$$

Observaciones 2.3.13.

1. *El producto geométrico de un 1-vector y un 3-vector es un 2-vector.*

2. *De* (2.39) *y* (2.41) *tenemos:* $x \downarrow T = T \downarrow x$

3. *De* (2.40) *y* (2.42) *tenemos:* $x \uparrow T = T \uparrow x$

4. *Por todo lo mencionado anteriormente tenemos:* $xT = Tx$

Demostración. (6)

Sea $B = x_4e_4 + x_5e_5 + x_6e_6$ un 2-vector y $T = x_7e_7$ un 3-vector.

$$
\begin{aligned}
BT &= (x_4e_4 + x_5e_5 + x_6e_6)(x_7e_7)\\
&= x_4e_4x_7e_7 + x_5e_5x_7e_7 + x_6e_6x_7e_7\\
&= x_4x_7e_4e_7 + x_5x_7e_5e_7 + x_6x_7e_6e_7\\
&= x_4x_7e_1e_2e_1e_2e_3 + x_5x_7e_1e_3e_1e_2e_3 + x_6x_7e_2e_3e_1e_2e_3\\
&= x_4x_7e_1(-e_1e_2)e_2e_3 + x_5x_7e_1(-e_1e_3)(-e_3e_2) + x_6x_7(-e_3e_2)(-e_2e_1)e_3\\
&= x_4x_7(-e_3) + x_5x_7(e_2) + x_6x_7e_3(e_1e_3)\\
&= x_4x_7(-e_3) + x_5x_7(e_2) + x_6x_7e_3(-e_3e_1)\\
&= x_4x_7(-e_3) + x_5x_7(e_2) + x_6x_7(-e_1)\\
BT &= \underbrace{-x_6x_7e_1 + x_5x_7e_2 - x_4x_7e_3}_{\text{1-vector}}
\end{aligned}
$$

$$\bullet\ B \downarrow T = \langle BT\rangle_{|2-3|} = \langle BT\rangle_1 = -x_6x_7e_1 + x_5x_7e_2 - x_4x_7e_3 \tag{2.43}$$

$$\bullet\ B \uparrow T = \langle BT\rangle_{2+3} = \langle BT\rangle_5 = 0 \tag{2.44}$$

$$\Rightarrow BT = B \downarrow T$$

□

De manera análoga tenemos:

$$TB = T \downarrow B$$

En efecto:

$$
\begin{aligned}
TB &= (x_7e_7)(x_4e_4 + x_5e_5 + x_6e_6)\\
&= x_7e_7x_4e_4 + x_7e_7x_5e_5 + x_7e_7x_6e_6\\
&= x_7x_4e_7e_4 + x_7x_5e_7e_5 + x_7x_6e_7e_6\\
&= x_7x_4e_1e_2e_3e_1e_2 + x_7x_5e_1e_2e_3e_1e_3 + x_7x_6e_1e_2e_3e_2e_3\\
&= x_7x_4(-e_2e_1)(-e_1e_3)e_2 + x_7x_5(-e_2e_1)(-e_1e_3)e_3 + x_7x_6e_1e_2(-e_2e_3)e_3\\
&= x_7x_4e_2(e_3e_2) + x_7x_5(e_2) + x_7x_6(-e_1)\\
&= x_7x_4e_2(-e_2e_3) + x_7x_5(e_2) + x_7x_6(-e_1)\\
&= x_7x_4(-e_3) + x_7x_5(e_2) + x_7x_6(-e_1)\\
TB &= \underbrace{-x_7x_6e_1 + x_7x_5e_2 - x_7x_4e_3}_{\text{1-vector}}
\end{aligned}
$$

$$\bullet\ T \downarrow B = \langle TB\rangle_{|3-2|} = \langle TB\rangle_1 = -x_6x_7e_1 + x_5x_7e_2 - x_4x_7e_3 \tag{2.45}$$

$$\bullet\ T \uparrow B = \langle TB\rangle_{3+2} = \langle TB\rangle_5 = 0 \tag{2.46}$$

$$\Rightarrow TB = T \downarrow B$$

Observaciones 2.3.14.

1. *El producto geométrico de un 2-vector y un 3-vector es un 1-vector.*
2. *De* (2.43) *y* (2.45) *tenemos:* $B \downarrow T = T \downarrow B$
3. *De* (2.44) *y* (2.46) *tenemos:* $B \uparrow T = T \uparrow B$
4. *Por todo lo mencionado anteriormente tenemos* $BT = TB$

Demostración. (7)
Sea $T_1 = \alpha e_{123}$ y $T_2 = \beta e_{123}$ dos 3-vectores.

$$\begin{aligned} T_1T_2 &= (\alpha e_{123})(\beta e_{123}) \\ &= \alpha\beta e_{123}^2 \\ T_1T_2 &= \underbrace{-\alpha\beta}_{0-vector} \end{aligned}$$

$$\bullet\ T_1 \downarrow T_2 = \langle T_1T_2\rangle_{|3-3|} = \langle T_1T_2\rangle_0 = -\alpha\beta \tag{2.47}$$

$$\bullet\ T_1 \uparrow T_2 = \langle T_1T_2\rangle_{3+3} = \langle T_1T_2\rangle_6 = 0 \tag{2.48}$$

$$\Rightarrow T_1T_2 = T_1 \downarrow T_2$$

□

De manera análoga tenemos:

$$T_2T_1 = T_2 \downarrow T_1$$

En efecto:

$$\begin{aligned} T_2T_1 &= (\beta e_{123})(\alpha e_{123}) \\ &= \beta\alpha e_{123}^2 \\ T_2T_1 &= \underbrace{-\beta\alpha}_{0-vector} \end{aligned}$$

$$\bullet\ T_2 \downarrow T_1 = \langle T_2T_1\rangle_{|3-3|} = \langle T_2T_1\rangle_0 = -\beta\alpha \tag{2.49}$$

$$\bullet\ T_2 \uparrow T_1 = \langle T_2T_1\rangle_{3+3} = \langle T_2T_1\rangle_6 = 0 \tag{2.50}$$

$$\Rightarrow T_2T_1 = T_2 \downarrow T_1$$

Observaciones 2.3.15.

1. *El producto geométrico de dos 3-vectores es un 0-vector.*
2. *De* (2.47) *y* (2.49) *tenemos:* $T_1 \downarrow T_2 = T_2 \downarrow T_1$
3. *De* (2.48) *y* (2.50) *tenemos:* $T_1 \uparrow T_2 = T_2 \uparrow T_1$
4. *Por todo lo mencionado anteriormente tenemos* $T_1T_2 = T_2T_1$

Demostración. (8)
Sea $B_1 = x_4e_4 + x_5e_5 + x_6e_6$ y $B_2 = y_4e_4 + y_5e_5 + y_6e_6$ dos 2-vectores

$$\begin{aligned}
B_1B_2 &= (x_4e_4 + x_5e_5 + x_6e_6)(y_4e_4 + y_5e_5 + y_6e_6) \\
&= x_4e_4y_4e_4 + x_4e_4y_5e_5 + x_4e_4y_6e_6 + x_5e_5y_4e_4 + x_5e_5y_5e_5 + x_5e_5y_6e_6 \\
&+ x_6e_6y_4e_4 + x_6e_6y_5e_5 + x_6e_6y_6e_6 \\
&= x_4y_4e_4e_4 + x_4y_5e_4e_5 + x_4y_6e_4e_6 + x_5y_4e_5e_4 + x_5y_5e_5e_5 + x_5y_6e_5e_6 \\
&+ x_6y_4e_6e_4 + x_6y_5e_6e_5 + x_6y_6e_6e_6 \\
&= x_4y_4e_1e_2e_1e_2 + x_4y_5e_1e_2e_1e_3 + x_4y_6e_1e_2e_2e_3 + x_5y_4e_1e_3e_1e_2 + x_5y_5e_1e_3e_1e_3 \\
&+ x_5y_6e_1e_3e_2e_3 + x_6y_4e_2e_3e_1e_2 + x_6y_5e_2e_3e_1e_3 + x_6y_6e_2e_3e_2e_3 \\
&= x_4y_4e_1(-e_1e_2)e_2 + x_4y_5e_1(-e_1e_2)e_3 + x_4y_6e_1\underbrace{e_2e_2}_{1}e_3 + x_5y_4e_1(-e_1e_3)e_2 \\
&+ x_5y_5e_1(-e_1e_3)e_3 + x_5y_6e_1(-e_2e_3)e_3 + x_6y_4(-e_3e_2)(-e_2e_1) + x_6y_5e_2e_3(-e_3e_1) \\
&+ x_6y_6e_2(-e_2e_3)e_3 \\
&= -x_4y_4 + x_4y_5(-e_2e_3) + x_4y_6e_1e_3 + x_5y_4(-e_3e_2) - x_5y_5 + x_5y_6(-e_1e_2) \\
&+ x_6y_4(e_3e_1) + x_6y_5(-e_2e_1) - x_6y_6 \\
&= -x_4y_4 + x_4y_5(-e_2e_3) + x_4y_6e_1e_3 + x_5y_4(e_2e_3) - x_5y_5 + x_5y_6(-e_1e_2) \\
&+ x_6y_4(-e_1e_3) + x_6y_5(e_1e_2) - x_6y_6 \\
&= -x_4y_4 + x_4y_5(-e_6) + x_4y_6e_5 + x_5y_4(e_6) - x_5y_5 + x_5y_6(-e_4) \\
&+ x_6y_4(-e_5) + x_6y_5(e_4) - x_6y_6 \\
B_1B_2 &= \underbrace{-x_4y_4 - x_5y_5 - x_6y_6}_{\text{0-vector}} + \underbrace{(x_6y_5 - x_5y_6)e_4 + (x_4y_6 - x_6y_4)e_5 + (x_5y_4 - x_4y_5)e_6}_{\text{2-vector}}
\end{aligned}$$

- $$B_1 \downarrow B_2 = \langle B_1B_2\rangle_{|2-2|} = \langle B_1B_2\rangle_0 = -x_4y_4 - x_5y_5 - x_6y_6 \tag{2.51}$$
- $$B_1 \uparrow B_2 = \langle B_1B_2\rangle_{2+2} = \langle B_1B_2\rangle_4 = 0 \tag{2.52}$$

$$\Rightarrow B_1B_2 = B_1 \downarrow B_2 + B_1 \uparrow B_2 + \langle B_1B_2\rangle_2$$

□

De manera análoga tenemos:

$$B_2B_1 = B_2 \downarrow B_1 + B_2 \uparrow B_1 + \langle B_2B_1\rangle_2 \tag{2.53}$$

En efecto:

$$\begin{aligned}
B_2B_1 &= (y_4e_4 + y_5e_5 + y_6e_6)(x_4e_4 + x_5e_5 + x_6e_6)\\
&= y_4e_4x_4e_4 + y_4e_4x_5e_5 + y_4e_4x_6e_6 + y_5e_5x_4e_4 + y_5e_5x_5e_5 + y_5e_5x_6e_6\\
&+ y_6e_6x_4e_4 + y_6e_6x_5e_5 + y_6e_6x_6e_6\\
&= y_4x_4e_4e_4 + y_4x_5e_4e_5 + y_4x_6e_4e_6 + y_5x_4e_5e_4 + y_5x_5e_5e_5 + y_5x_6e_5e_6\\
&+ y_6x_4e_6e_4 + y_6x_5e_6e_5 + y_6x_6e_6e_6\\
&= y_4x_4e_1e_2e_1e_2 + y_4x_5e_1e_2e_1e_3 + y_4x_6e_1e_2e_2e_3 + y_5x_4e_1e_3e_1e_2 + y_5x_5e_1e_3e_1e_3\\
&+ y_5x_6e_1e_3e_2e_3 + y_6x_4e_2e_3e_1e_2 + y_6x_5e_2e_3e_1e_3 + y_6x_6e_2e_3e_2e_3\\
&= y_4x_4e_1(-e_1e_2)e_2 + y_4x_5e_1(-e_1e_2)e_3 + y_4x_6e_1\underbrace{e_2e_2}_{1}e_3 + y_5x_4e_1(-e_1e_3)e_2\\
&+ y_5x_5e_1(-e_1e_3)e_3 + y_5x_6e_1(-e_2e_3)e_3 + y_6x_4(-e_3e_2)(-e_2e_1) + y_6x_5e_2e_3(-e_3e_1)\\
&+ y_6x_6e_2(-e_2e_3)e_3\\
&= -y_4x_4 + y_4x_5(-e_2e_3) + y_4x_6e_1e_3 + y_5x_4(-e_3e_2) - y_5x_5 + y_5x_6(-e_1e_2)\\
&+ y_6x_4(e_3e_1) + y_6x_5(-e_2e_1) - y_6x_6\\
&= -y_4x_4 + y_4x_5(-e_2e_3) + y_4x_6e_1e_3 + y_5x_4(e_2e_3) - y_5x_5 + y_5x_6(-e_1e_2)\\
&+ y_6x_4(-e_1e_3) + y_6x_5(e_1e_2) - y_6x_6\\
&= -y_4x_4 + y_4x_5(-e_6) + y_4x_6e_5 + y_5x_4e_6 - y_5x_5 - y_5x_6e_4\\
&+ y_6x_4(-e_5) + y_6x_5(e_4) - y_6x_6\\
B_2B_1 &= \underbrace{-y_4x_4 - y_5x_5 - y_6x_6}_{\text{0-vector}} + \underbrace{(y_6x_5 - y_5x_6)e_4 + (y_4x_6 - y_6x_4)e_5 + (y_5x_4 - y_4x_5)e_6}_{\text{2-vector}}
\end{aligned}$$

- $B_2 \downarrow B_1 = \langle B_2B_1\rangle_{|2-2|} = \langle B_2B_1\rangle_0 = -y_4x_4 - y_5x_5 - y_6x_6$ (2.54)
- $B_2 \uparrow B_1 = \langle B_2B_1\rangle_{2+2} = \langle B_2B_1\rangle_4 = 0$ (2.55)

$$\Rightarrow B_2B_1 = B_2 \downarrow B_1 + B_2 \uparrow B_1 + \langle B_2B_1\rangle_2$$

Observaciones 2.3.16.

1. *De* (2.51) *y* (2.54) *tenemos:* $B_1 \downarrow B_2 = B_2 \downarrow B_1$
2. *De* (2.52) *y* (2.55) *tenemos:* $B_1 \uparrow B_2 = B_2 \uparrow B_1$

3. *También tenemos:* $\langle B_1B_2\rangle_2 = -\langle B_2B_1\rangle_2$

4. *Sumando y restando* (2.20) *y* (2.53) *tenemos:*

$$\begin{aligned} B_1 \downarrow B_2 + B_1 \uparrow B_2 &= \frac{1}{2}(B_1B_2 + B_2B_1) \\ \langle B_1B_2\rangle_2 &= \frac{1}{2}(B_1B_2 - B_2B_1) \end{aligned}$$

5. *Por todo lo mencionado anteriormente tenemos* $B_1B_2 \neq B_2B_1$

Ejercicio 2.3.17. *Si x, y, z son 1-vectores. Probar:* $x \downarrow (y \uparrow z) = (x \downarrow y)z - (x \downarrow z)y$

Demostración.

$$\begin{aligned} \underbrace{x}_{\text{1-vector}} \downarrow \underbrace{(y \uparrow z)}_{\text{2-vector}} &= \frac{1}{2}\left[x(y \uparrow z) - (y \uparrow z)x\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[x\frac{1}{2}(yz - zy) - \frac{1}{2}(yz - zy)x\right] \\ &= \frac{1}{4}\left[xyz - xzy - yzx + zyx\right] \\ &= \frac{1}{4}\left[xyz - xzy - yzx + zyx + yxz - yxz + zxy - zxy\right] \\ &= \frac{1}{4}\left[(xy + yx)z - (xz + zx)y + z(yx + xy) - y(zx + xz)\right] \\ &= \frac{1}{4}\left[2(x \downarrow y)z - 2(x \downarrow z)y + z(2(y \downarrow z)) - y(2(z \downarrow x))\right] \\ &= \frac{1}{4}[2(x \downarrow y)z - 2(x \downarrow z)y + 2z(\underbrace{y \downarrow x}_{\in\mathbb{R}}) - 2y(\underbrace{z \downarrow x}_{\in\mathbb{R}})] \\ &= \frac{1}{4}[2(x \downarrow y)z - 2(x \downarrow z)y + 2(x \downarrow y)z - 2(x \downarrow z)y] \\ &= \frac{1}{4}[4(x \downarrow y)z - 4(x \downarrow z)y] \\ \Rightarrow x \downarrow (y \uparrow z) &= (x \downarrow y)z - (x \downarrow z)y \end{aligned}$$

□

Ejercicio 2.3.18. *Si x, y, z, w son 1-vectores. Probar:*
$(x \uparrow y \uparrow z) \downarrow w = (x \uparrow y)(z \downarrow w) - (x \uparrow z)(y \downarrow w) + (y \uparrow z)(x \downarrow w)$

Demostración.
Como $T \downarrow w = Tw$, $Tw = wT$ tenemos:

$$\begin{aligned}
(e_1 \uparrow e_2 \uparrow e_3) \downarrow w &= (e_1 \uparrow e_2 \uparrow e_3)w \\
&= (e_1e_2e_3)w \\
&= w(e_1e_2e_3) \\
\Rightarrow w(e_1e_2e_3) &= (we_1)e_2e_3 \\
&= (2w \downarrow e_1 - e_1w)e_2e_3 \\
&= (2w \downarrow e_1)e_2e_3 - e_1(we_2)e_3 \\
&= (2w \downarrow e_1)e_2e_3 - e_1(2w \downarrow e_2 - e_2w)e_3 \\
&= (2w \downarrow e_1)e_2e_3 - e_1(2w \downarrow e_2)e_3 + e_1e_2(we_3) \\
&= (2w \downarrow e_1)e_2e_3 - e_1(2w \downarrow e_2)e_3 + e_1e_2(2w \downarrow e_3 - e_3w) \\
&= (2w \downarrow e_1)e_2e_3 - e_1(2w \downarrow e_2)e_3 + e_1e_2(2w \downarrow e_3) - e_1e_2e_3w \\
\Rightarrow w(e_1e_2e_3) &= (2w \downarrow e_1)e_2e_3 - e_1(2w \downarrow e_2)e_3 + e_1e_2(2w \downarrow e_3) - e_1e_2e_3w \\
\Rightarrow w(e_1e_2e_3) + (e_1e_2e_3)w &= (2w \downarrow e_1)e_2e_3 - e_1(2w \downarrow e_2)e_3 + e_1e_2(2w \downarrow e_3) \\
w(e_1e_2e_3) + (e_1e_2e_3)w &= 2[(w \downarrow e_1)e_2e_3 - e_1(w \downarrow e_2)e_3 + e_1e_2(w \downarrow e_3)] \\
\frac{1}{2}[w(e_1e_2e_3) + (e_1e_2e_3)w] &= [(w \downarrow e_1)e_2e_3 - e_1(w \downarrow e_2)e_3 + e_1e_2(w \downarrow e_3)] \\
(e_1e_2e_3) \downarrow w &= e_2e_3(e_1 \downarrow w) - e_1e_3(e_2 \downarrow w) + e_1e_2(e_3 \downarrow w) \\
\Rightarrow (e_1 \uparrow e_2 \uparrow e_3) \downarrow w &= e_1 \uparrow e_2(e_3 \downarrow w) - e_1 \uparrow e_3(e_2 \downarrow w) + e_2 \uparrow e_3(e_1 \downarrow w)
\end{aligned}$$

Como se cumple para los los vectores canónicos, por la linealidad el resultado es en general verdadero.

□

Ejercicio 2.3.19. *Si x es un 1-vector, B es un 2-vector y T es un 3-vector. Probar: $x \downarrow (T \downarrow B) = (x \downarrow T) \downarrow B$*

Demostración.
Si M, N, P son multivectores, entonces: $(MN)P = M(NP)$
En particular para j-vectores, tenemos:

$$(xT)B = x(TB)$$

Por proposición 2.2.7(3) y (4) :

$$\underbrace{(x \downarrow T)}_{\text{2-vector}} \underbrace{B}_{\text{2-vector}} = \underbrace{x}_{\text{1-vector}} \underbrace{(T \downarrow B)}_{\text{1-vector}}$$

$$\underbrace{\underbrace{(x \downarrow T)}_{\text{2-vector}} \downarrow \underbrace{B}_{\text{2-vector}}}_{\text{0-vector}} + \underbrace{\underbrace{(x \downarrow T)}_{\text{2-vector}} \uparrow \underbrace{B}_{\text{2-vector}}}_{0} + \underbrace{\langle (x \downarrow T) B \rangle_2}_{\text{2-vector}} = \underbrace{\underbrace{x}_{\text{1-vector}} \downarrow \underbrace{(T \downarrow B)}_{\text{1-vector}}}_{\text{0-vector}} + \underbrace{\underbrace{x}_{\text{1-vector}} \uparrow \underbrace{(T \downarrow B)}_{\text{1-vector}}}_{\text{2-vector}}$$

Comparando la parte del 0-vector, tenemos:

$$\Rightarrow x \downarrow (T \downarrow B) = (x \downarrow T) \downarrow B$$

□

Ejercicio 2.3.20. *Si x, y son 1-vectores y B es un 2-vector.*
Probar: $y \downarrow (x \downarrow B) = (y \uparrow x) \downarrow B$

Demostración.
Sabemos que: Si M, N, P son multivectores, entonces: $(MN)P = M(NP)$
En particular para j-vectores, tenemos:

$$y(xB) = (yx)B$$

Por proposición 2.2.7(1) y (2) :

$$y(x \downarrow B + x \uparrow B) = (y \downarrow x + y \uparrow x)B$$

$$\underbrace{y}_{\text{1-vector}} \underbrace{(x \downarrow B)}_{\text{1-vector}} + \underbrace{y}_{\text{1-vector}} \underbrace{(x \uparrow B)}_{\text{3-vector}} = \underbrace{(y \downarrow x)}_{\text{0-vector}} \underbrace{B}_{\text{2-vector}} + \underbrace{(y \uparrow x)}_{\text{2-vector}} \underbrace{B}_{\text{2-vector}}$$

$$\underbrace{\underbrace{y}_{\text{1-vector}} \downarrow \underbrace{(x \downarrow B)}_{\text{1-vector}}}_{\text{0-vector}} + \underbrace{\underbrace{y}_{\text{1-vector}} \uparrow \underbrace{(x \downarrow B)}_{\text{1-vector}}}_{\text{2-vector}} + \underbrace{\underbrace{y}_{\text{1-vector}} \downarrow \underbrace{(x \uparrow B)}_{\text{3-vector}}}_{\text{2-vector}} = \underbrace{\underbrace{(y \downarrow x)}_{\text{0-vector}} \underbrace{B}_{\text{2-vector}}}_{\text{2-vector}} + \underbrace{\underbrace{(y \uparrow x)}_{\text{2-vector}} \downarrow \underbrace{B}_{\text{2-vector}}}_{\text{0-vector}}$$

$$+ \underbrace{\underbrace{(y \uparrow x)}_{\text{2-vector}} \uparrow \underbrace{B}_{\text{2-vector}}}_{0} + \underbrace{\underbrace{\langle (y \uparrow x) B \rangle_2}_{\text{2-vector}}}_{\text{2-vector}}$$

Comparando la parte del 0-vector, tenemos:

$$\Rightarrow y \downarrow (x \downarrow B) = (y \uparrow x) \downarrow B$$

□

2.4. El Trivector Básico de AG(3)

Definición 2.4.1. *El trivector básico de AG(3) se denota por:* $\tau = e_{123} = e_1e_2e_3$

Observación 2.4.2.

1. *Los vectores* e_1, e_2, e_3 *son ortogonales dos a dos, es decir:* $e_i \downarrow e_j = 0$ *si* $i \neq j$. *(Figura 2.1)*

2. *Los vectores* e_1, e_2, e_3 *son unitarios, es decir:* $e_1e_1 = e_2e_2 = e_3e_3 = 1$.

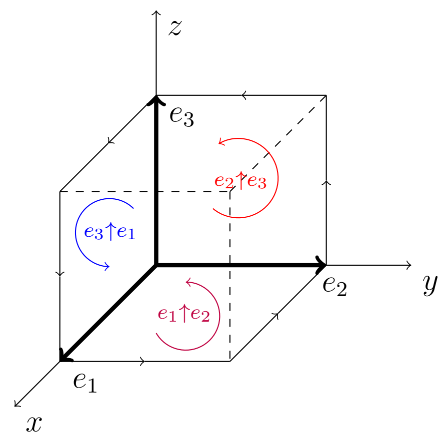


Figura 2.1:

Proposición 2.4.3.

1. $-\tau = e_3e_2e_1$

2. $\tau^2 = -1$

3. a) $\tau e_1 = e_2 \uparrow e_3$

   b) $\tau e_2 = -e_1 \uparrow e_3$

   c) $\tau e_3 = e_1 \uparrow e_2$

4. $-\tau = \tau^{-1}$

5. $e_1 \uparrow e_2 \uparrow e_3 = -e_3 \uparrow e_2 \uparrow e_1$

6. $e_1e_2e_3 = e_1 \uparrow e_2 \uparrow e_3$

7. $\tau M = M\tau, \ \forall M \in AG(3)$

Demostración. (1)

$$\begin{aligned}
\tau &= (e_1e_2)e_3 \\
&= (-e_2e_1)e_3 \\
&= -e_2(e_1e_3) \\
&= -e_2(-e_3e_1) \\
&= (e_2e_3)e_1 \\
&= -e_3e_2e_1 \\
\Rightarrow -\tau &= e_3e_2e_1
\end{aligned}$$

□

Demostración. (2)
Como $e_2e_3 = -e_3e_2$, $e_3e_1 = -e_1e_3$, $e_1e_2 = -e_2e_1$ y$e_1e_1 = e_2e_2 = e_3e_3 = 1$, tenemos:

$$\begin{aligned}
\tau^2 &= e_{123}^2 \\
&= e_1e_2e_3e_1e_2e_3 \\
&= e_1(-e_3e_2)e_1e_2e_3 \\
&= (-e_1e_3)e_2e_1e_2e_3 \\
&= (e_3e_1)e_2e_1e_2e_3 \\
&= e_3(-e_2e_1)e_1e_2e_3 \\
&= -1 \\
\Rightarrow \tau^2 &= -1
\end{aligned}$$

□

Demostración. (3)
Como $e_1e_2 = -e_2e_1$, $e_3e_1 = -e_1e_3$ y $e_2 \downarrow e_3 = e_1 \downarrow e_3 = e_1 \downarrow e_2 = 0$, tenemos:

$$\begin{aligned}
a)\tau e_1 &= (e_1e_2e_3)e_1 \\
&= (e_1e_2)(e_3e_1) \\
&= (-e_2e_1)(-e_1e_3) \\
&= e_2\underbrace{(e_1e_1)}_{1}e_3 \\
&= e_2e_3 \\
&= e_2 \uparrow e_3, \\
\Rightarrow \tau e_1 &= e_2 \uparrow e_3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b)\tau e_2 &= (e_1e_2e_3)e_2\\
&= (e_1e_2)(e_3e_2)\\
&= (e_1e_2)(-e_2e_3)\\
&= -e_1\underbrace{(e_2e_2)}_{1}e_3\\
&= -e_1e_3\\
&= -e_1 \uparrow e_3\\
\Rightarrow \tau e_2 &= -e_1 \uparrow e_3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c)\tau e_3 &= (e_1e_2e_3)e_3\\
&= e_1e_2\underbrace{(e_3e_3)}_{1}\\
&= e_1e_2\\
&= e_1 \uparrow e_2\\
\Rightarrow \tau e_3 &= e_1 \uparrow e_2
\end{aligned}$$

□

Demostración. (4)

$$\begin{aligned}
\tau^2 &= -1\\
-\tau^2 &= 1\\
-\tau^2 &= \tau\tau^{-1}\\
-\tau\tau &= \tau\tau^{-1}\\
-\underbrace{\tau^{-1}\tau}_{1}\tau &= \underbrace{\tau^{-1}\tau}_{1}\tau^{-1}\\
\Rightarrow -\tau &= \tau^{-1}
\end{aligned}$$

□

Demostración. (5)

$$\begin{aligned}
e_1 \uparrow e_2 \uparrow e_3 &= e_1 \uparrow (e_2 \uparrow e_3)\\
&= e_1 \uparrow (-e_3 \uparrow e_2)\\
&= (-e_1 \uparrow e_3) \uparrow e_2\\
&= (e_3 \uparrow e_1) \uparrow e_2\\
&= e_3 \uparrow (e_1 \uparrow e_2)\\
&= e_3 \uparrow (-e_2 \uparrow e_1)\\
&= -e_3 \uparrow e_2 \uparrow e_1\\
\Rightarrow e_1 \uparrow e_2 \uparrow e_3 &= -e_3 \uparrow e_2 \uparrow e_1
\end{aligned}$$

□

Demostración. (6)
Como $e_1 \downarrow e_2 = e_3 \downarrow e_1 = e_3 \downarrow e_2 = 0$, entonces:

$$\begin{aligned}
e_1e_2e_3 &= (e_1e_2)e_3 \\
&= (e_1 \downarrow e_2 + e_1 \uparrow e_2)e_3 \\
&= \underbrace{(e_1 \uparrow e_2)}_{\text{2-vector}} \underbrace{e_3}_{\text{1-vector}} \\
&= (e_1 \uparrow e_2) \downarrow e_3 + (e_1 \uparrow e_2) \uparrow e_3 \\
&= -e_3 \downarrow (e_1 \uparrow e_2) + (e_1 \uparrow e_2) \uparrow e_3 \\
&= -\left[(e_3 \downarrow e_1)e_2 - (e_3 \downarrow e_2)e_1\right] + (e_1 \uparrow e_2) \uparrow e_3 \\
&= (e_1 \uparrow e_2) \uparrow e_3 \\
\Rightarrow e_1e_2e_3 &= e_1 \uparrow e_2 \uparrow e_3
\end{aligned}$$

□

Demostración. (7)
Es claro que τ conmuta con cualquier escalar 0-vector.

- Sea $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$ un 1-vector arbitrario, donde $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
x\tau &= (x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3)e_1e_2e_3 \\
&= x_1e_1e_1e_2e_3 + x_2e_2e_1e_2e_3 + x_3e_3e_1e_2e_3 \\
&= x_1e_1(-e_2e_1)e_3 + x_2(-e_1e_2)(-e_3e_2) + x_3(-e_1e_3)e_2e_3 \\
&= x_1e_1e_2(-e_1e_3) + x_2e_1e_2e_3e_2 + x_3e_1(-e_3e_2)e_3 \\
&= x_1e_1e_2(e_3e_1) + x_2e_1e_2e_3e_2 + x_3e_1e_2e_3e_3 \\
&= e_1e_2e_3x_1e_1 + e_1e_2e_3x_2e_2 + e_1e_2e_3x_3e_3 \\
&= e_1e_2e_3(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3) \\
&= \tau x \\
\Rightarrow x\tau &= \tau x
\end{aligned}$$

- Sea $B = B_1e_4 + B_2e_5 + B_3e_6$ un 2-vector arbitrario, donde $B_1, B_2, B_3 \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
B\tau &= (B_1e_4 + B_2e_5 + B_3e_6)e_1e_2e_3 \\
&= (B_1e_1e_2 + B_2e_1e_3 + B_3e_2e_3)e_1e_2e_3 \\
&= B_1e_1e_2e_1e_2e_3 + B_2e_1e_3e_1e_2e_3 + B_3e_2e_3e_1e_2e_3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= B_1e_1e_2(-e_2e_1)e_3 + B_2e_1e_3(-e_2e_1)e_3 + B_3e_2(-e_1e_3)e_2e_3\\
&= B_1e_1e_2e_2(-e_1e_3) + B_2e_1(-e_3e_2)e_1e_3 + B_3(-e_2e_1)e_3e_2e_3\\
&= B_1e_1e_2e_2e_3e_1 + B_2e_1e_2e_3e_1e_3 + B_3e_1e_2e_3e_2e_3\\
&= B_1e_1e_2(-e_3e_2)e_1 + B_2e_1e_2e_3e_1e_3 + B_3e_1e_2e_3e_2e_3\\
&= B_1e_1e_2e_3(-e_2e_1) + B_2e_1e_2e_3e_1e_3 + B_3e_1e_2e_3e_2e_3\\
&= B_1e_1e_2e_3e_1e_2 + B_2e_1e_2e_3e_1e_3 + B_3e_1e_2e_3e_2e_3\\
&= e_1e_2e_3(B_1e_1e_2 + B_2e_1e_3 + B_3e_2e_3)\\
&= e_1e_2e_3(B_1e_4 + B_2e_5 + B_3e_6)\\
&= \tau B\\
\Rightarrow B\tau &= \tau B
\end{aligned}$$

- Sea $T = \alpha e_1e_2e_3$ un 3-vector arbitrario, donde $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
T\tau &= (\alpha e_1e_2e_3)(e_1e_2e_3)\\
&= (e_1e_2e_3)\alpha(e_1e_2e_3)\\
&= (e_1e_2e_3)(\alpha e_1e_2e_3)\\
&= \tau T\\
\Rightarrow T\tau &= \tau T
\end{aligned}$$

Por lo tanto: $\tau M = M\tau$, $\forall M \in AG(3)$

□

Proposición 2.4.4. *Sea x un vector, B un bivector y $\tau = e_{123}$ se cumple:*

1. $x \downarrow (e_{123}B) = \dfrac{xe_{123}B + e_{123}Bx}{2} = e_{123}(x \uparrow B)$

2. $x \uparrow (e_{123}B) = \dfrac{xe_{123}B - e_{123}Bx}{2} = e_{123}(x \downarrow B)$

Demostración. (1)

Por proposición 2.3.8(6), 2.4.3 (7), tenemos:

$$
\begin{aligned}
x \downarrow (e_{123}B) &= x \downarrow (\overbrace{\underbrace{e_{123}}_{\text{3-vector}} \downarrow \underbrace{B}_{\text{2-vector}}}^{\text{1-vector}}) \\
&= \frac{x(e_{123} \downarrow B) + (e_{123} \downarrow B)x}{2} \\
&= \frac{x(e_{123}B) + (e_{123}B)x}{2} \\
&= \frac{(xe_{123})B + (e_{123}B)x}{2} \\
&= \frac{(e_{123}x)B + (e_{123}B)x}{2} \\
&= \frac{e_{123}(xB) + e_{123}(Bx)}{2} \\
&= \frac{e_{123}(xB + Bx)}{2} \\
&= e_{123}\frac{(xB + Bx)}{2} \\
&= e_{123}(x \uparrow B) \\
\Rightarrow x \downarrow (e_{123}B) &= e_{123}(x \uparrow B)
\end{aligned}
$$

□

Demostración. (2)
Por proposición 2.3.8(6), 2.4.3 (7), tenemos:

$$
\begin{aligned}
x \uparrow (e_{123}B) &= x \uparrow (\underbrace{e_{123} \downarrow B}_{\text{1-vector}}) \\
&= \frac{x(e_{123} \downarrow B) - (e_{123} \downarrow B)x}{2} \\
&= \frac{x(e_{123}B) - (e_{123}B)x}{2} \\
&= \frac{(xe_{123})B - (e_{123}B)x}{2} \\
&= \frac{(e_{123}x)B - (e_{123}B)x}{2} \\
&= \frac{e_{123}(xB) - e_{123}(Bx)}{2} \\
&= \frac{e_{123}(xB - Bx)}{2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= e_{123}\frac{(xB - Bx)}{2} \\
&= e_{123}(x \downarrow B) \\
\Rightarrow x \uparrow (e_{123}B) &= e_{123}(x \downarrow B)
\end{aligned}
$$

□

2.5. La Dualidad Geométrica

Definición 2.5.1. *La aplicación:*

$$
\begin{aligned}
D : AG(3) &\to AG(3) \\
M &\mapsto D(M) = e_{123}M
\end{aligned}
$$

es llamado el operador **Dualidad Geométrica** *de AG(3).* $e_{123}M$ *es llamado el multivector dual del multivector M.*

Proposición 2.5.2.

$$e_{123}\langle AG(3)\rangle_j = \langle AG(3)\rangle_{3-j}$$

Demostración.

- Si $j = 0 \Rightarrow e_{123}\langle AG(3)\rangle_0 = \langle AG(3)\rangle_3$

  En efecto:
  Sea $M \in e_{123}\langle AG(3)\rangle_0$, entonces $M = e_{123}x_0$

  $$
  \begin{aligned}
  &\Leftrightarrow M = x_0 e_{123} \\
  &\Leftrightarrow M = x_0 e_7 \\
  &\Leftrightarrow M \in \langle AG(3)\rangle_3
  \end{aligned}
  $$

  Luego $e_{123}\langle AG(3)\rangle_0 = \langle AG(3)\rangle_3$

- Si $j = 1 \Rightarrow e_{123}\langle AG(3)\rangle_1 = \langle AG(3)\rangle_2$
  En efecto:
  Sea $M \in e_{123}\langle AG(3)\rangle_1$, entonces $M = e_{123}(a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3)$

  $$
  \begin{aligned}
  \Leftrightarrow M &= e_{123}(a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3) \\
  M &= a_1e_{123}e_1 + a_2e_{123}e_2 + a_3e_{123}e_3 \\
  M &= a_1(e_2e_3) + a_2(-e_1e_3) + a_3(e_1e_2) \\
  M &= a_1e_6 - a_2e_5 + a_3e_4 \\
  \Leftrightarrow M &= a_3e_4 - a_2e_5 + a_1e_6 \\
  \Leftrightarrow M &\in \langle AG(3)\rangle_2
  \end{aligned}
  $$

  Luego $e_{123}\langle AG(3)\rangle_1 = \langle AG(3)\rangle_2$

- Si $j = 2 \Rightarrow e_{123}\langle AG(3)\rangle_2 = \langle AG(3)\rangle_1$
  En efecto:
  Sea $M \in e_{123}\langle AG(3)\rangle_2$, entonces $M = e_{123}(a_4e_4 + a_5e_5 + a_6e_6)$

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow M &= a_4e_{123}e_4 + a_5e_{123}e_5 + a_6e_{123}e_6 \\
M &= a_4(-e_3) + a_5(e_2) + a_6(-e_1) \\
M &= -a_6e_1 + a_5e_2 - a_4e_3 \\
\Leftrightarrow M &= -a_6e_1 + a_5e_2 - a_4e_3 \\
\Leftrightarrow M &\in \langle AG(3)\rangle_1
\end{aligned}$$

  Luego $e_{123}\langle AG(3)\rangle_2 = \langle AG(3)\rangle_1$

- Si $j = 3 \Rightarrow e_{123}\langle AG(3)\rangle_3 = \langle AG(3)\rangle_0$

  En efecto:
  Sea $M \in e_{123}\langle AG(3)\rangle_3$, entonces$M = e_{123}a_7e_7$,

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow M &= a_7e_{123}e_7 \\
&= a_7e_{123}e_{123} \\
&= a_7(-1) \\
&= -a_7e_0 \\
\Leftrightarrow M &= -a_7e_0 \\
\Leftrightarrow M &\in \langle AG(3)\rangle_0
\end{aligned}$$

  Luego $e_{123}\langle AG(3)\rangle_3 = \langle AG(3)\rangle_0$

Por lo tanto $e_{123}\langle AG(3)\rangle_j = \langle AG(3)\rangle_{3-j}$, $j \in \{1, 2, 3\}$ $\square$

2.6. Bivectores

Proposición 2.6.1. *Todo bivector B se escribe de manera única de la siguiente forma:*

$$B = \tau x \;\; , \textit{ donde } x \textit{ es vector}$$

Demostración.
Por proposición 2.4.3 (3), tenemos:

$$e_2 \uparrow e_3 = e_2e_3 = \tau e_1 \tag{2.56}$$

$$e_3 \uparrow e_1 = e_3e_1 = \tau e_2 \tag{2.57}$$

$$e_1 \uparrow e_2 = e_1e_2 = \tau e_3 \tag{2.58}$$

Sumando (2.56), (2.57) y (2.58), tenemos:

$$\begin{aligned} e_2e_3 + e_3e_1 + e_1e_2 &= \tau e_1 + \tau e_2 + \tau e_3 \\ e_1e_2 - e_1e_3 + e_2e_3 &= \tau(e_1 + e_2 + e_3) \\ \underbrace{e_4 - e_5 + e_6}_{\text{2-vector}} &= \tau(\underbrace{e_1 + e_2 + e_3}_{\text{1-vector}}) \end{aligned}$$

Luego, sea el 2-vector B y el 1-vector x:

$$\Rightarrow B = \tau x$$

□

Observación 2.6.2.

1. *B es el dual de x.*
2. *El conjunto de todos los bivectores de AG(3) es un espacio vectorial, con base:*

$$\{e_1e_2, e_1e_3, e_2e_3\}$$

3. *El bivector B se escribe de manera única como combinación lineal de los elementos de la base, es decir:*

$$\begin{aligned} B &= B_{12}e_1e_2 + B_{13}e_1e_3 + B_{23}e_2e_3 \\ \Rightarrow B &= \sum_{i,j=1}^{3} B_{ij}e_ie_j \quad ,donde\ B_{ij} \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow B &= \sum_{i,j=1}^{3} B_{ij}e_i \uparrow e_j \end{aligned}$$

Proposición 2.6.3. *Sea $\{e_1e_2, e_1e_3, e_2e_3\}$ una base del conjunto de bivectores de AG(3), $B = B_{12}e_1e_2 + B_{13}e_1e_3 + B_{23}e_2e_3$ es un bivector, donde $B_{ij} \in \mathbb{R}$.*

$$Si\, B_{ij} = -B_{ji}\ entonces\ B = \sum_{i,j=1}^{3} \frac{1}{2} B_{ij}e_i \uparrow e_j$$

Demostración.

$$
\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^{3} B_{ij} e_i \uparrow e_j &= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} B_{ij} e_i \uparrow e_j \\
&= \sum_{i=1}^{3} (B_{i1} e_i \uparrow e_1 + B_{i2} e_i \uparrow e_2 + B_{i3} e_i \uparrow e_3) \\
&= B_{11} \underbrace{e_1 \uparrow e_1}_{0} + B_{12} e_1 \uparrow e_2 + B_{13} e_1 \uparrow e_3 \\
&+ B_{21} e_2 \uparrow e_1 + B_{22} \underbrace{e_2 \uparrow e_2}_{0} + B_{23} e_2 \uparrow e_3 \\
&+ B_{31} e_3 \uparrow e_1 + B_{32} e_3 \uparrow e_2 + B_{33} \underbrace{e_3 \uparrow e_3}_{0} \\
&= B_{12} e_1 \uparrow e_2 + B_{13} e_1 \uparrow e_3 - B_{12}(-e_1 \uparrow e_2) \\
&+ B_{23} e_2 \uparrow e_3 - B_{13}(-e_1 \uparrow e_3) - B_{23}(-e_2 \uparrow e_3) \\
&= 2(B_{12} e_1 \uparrow e_2 + B_{13} e_1 \uparrow e_3 + B_{23} e_2 \uparrow e_3) \\
&= 2B
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $B = \sum_{i,j=1}^{3} \frac{1}{2} B_{ij} e_i \uparrow e_j$

□

2.7. El Producto Vectorial en AG(3)

Definición 2.7.1. *El producto vectorial de Gibbs de dos vectores se define por:*

$$x \times y = -e_{123}(x \uparrow y)$$

Observación 2.7.2.

1. $x \uparrow y = e_{123} x \times y$

2. $x \times y$ *es el multivector dual del multivector* $y \uparrow x$ *. (Figura 2.2)*

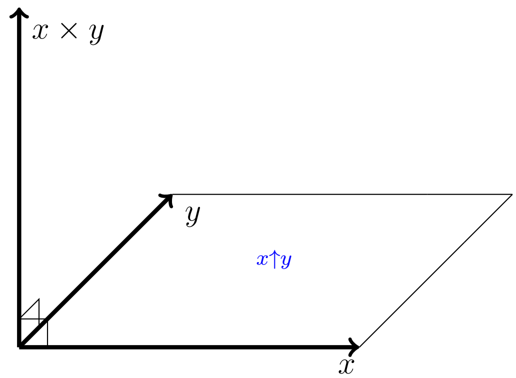


Figura 2.2:

3. *El producto exterior de dos vectores x e y es una superficie orientada y el producto vectorial $x \times y$ es un vector perpendicular a los dos vectores que se multiplican, y cuyo sentido se asigna con la regla de la mano derecha.*

Ejercicio 2.7.3. *Probar :* $x \uparrow y \uparrow z = \tau[x \downarrow (y \times z)]$

Demostración.
Como $\tau x = x\tau$, entonces:

$$\begin{aligned}
\tau[\underbrace{x}_{\text{1-vector}} \downarrow (\underbrace{y \times z}_{\text{1-vector}})] &= \frac{\tau}{2}[x(y \times z) + (y \times z)x] \\
&= \frac{\tau}{2}[x(-\tau)(y \uparrow z) + (-\tau)(y \uparrow z)x] \\
&= \frac{\tau}{2}[(-\tau)x(y \uparrow z) + (-\tau)(y \uparrow z)x] \\
&= \frac{-\tau^2}{2}x(y \uparrow z) - \frac{\tau^2}{2}(y \uparrow z)x \\
&= \frac{1}{2}x(y \uparrow z) + \frac{1}{2}(y \uparrow z)x
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}[\underbrace{x}_{\text{1-vector}}(\underbrace{y \uparrow z}_{\text{2-vector}}) + (y \uparrow z)x] \\
&= x \uparrow (y \uparrow z) \\
&= x \uparrow y \uparrow z \\
\Rightarrow \boldsymbol{\tau}[x \downarrow (y \times z)] &= x \uparrow y \uparrow z
\end{aligned}
$$

□

Capítulo 3

Operadores Lineales en el Álgebra Geométrica AG(3)

En el capítulo anterior desarrollamos definiciones y propiedades, que serán de gran utilidad en el desarrollo del presente capítulo, donde desarrollaremos los operadores lineales en el contexto del álgebra geométrica. Todo operador lineal, que actúa sobre vectores, se extiende a multivectores y se obtiene un operador lineal actuando sobre el álgebra geométrica. Esta teoría sobre operadores lineales lo podemos encontrar en [4].

Estos operadores serán representados en términos del álgebra geométrica para facilitar el cálculo. Cada operador lineal puede ser construído con multivectores usando el producto interior, producto exterior y producto geométrico. Luego podemos decir que todo operador lineal tiene su representación en el álgebra geométrica.

Primero desarrollaremos algunos conceptos generales que serán útiles para la caracterización y clasificación de operadores lineales.

Nota: Consideremos $E = \mathbb{R}^3$ y $f(x) = fx, \forall x \in E$

Definición 3.0.1. *Una función $f : E \to E$ es un operador lineal si :*

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R};\ \forall x, y \in E$$

3.1. Operador Adjunto

Definición 3.1.1. *Sea $f : E \to E$ un operador lineal.*
Definimos el operador lineal adjunto o transpuesta de f como $\overline{f} : E \to E$ que satisface la condición:

$$y \downarrow f(x) = \overline{f}(y) \downarrow x, \;\; \textit{para todo } x, y \in E \tag{3.1}$$

Para enfatizar que f opera antes que el producto interno, podemos escribir (3.1) *en la forma siguiente:*

$$y \downarrow fx = \overline{f}y \downarrow x, \ \ \textit{para todo } x, y \in E$$

3.2. Extensión de Operadores Lineales

Cada operador lineal f sobre $\mathbb{R}^3$ induce un operador lineal natural $\underline{f}$ sobre AG(3) que será definido de modo natural en la siguiente definición.

Definición 3.2.1. *Sea $f : E \to E$ un operador lineal.*
Se define el operador inducido $\underline{f} : AG(3) \to AG(3)$ mediante:

$$\begin{aligned}
M &= x_0 + \sum_{1 \leq i \leq 3} x_i e_i + \sum_{1 \leq i < j < \leq 3} x_{ij} e_i e_j + x_7 e_7 \\
M &= x_0 + \sum_{1 \leq i \leq 3} x_i e_i + \sum_{1 \leq i < j < \leq 3} x_{ij} e_i \uparrow e_j + x_7 e_1 e_2 e_3 \\
\underline{f}(M) &= x_0 + \sum_{1 \leq i \leq 3} x_i \underline{f}(e_i) + \sum_{1 \leq i < j < \leq 3} x_{ij} \underline{f}(e_i \uparrow e_j) + x_7 \underline{f}(e_1 \uparrow e_2 \uparrow e_3) \\
\underline{f}(M) &= x_0 + \sum_{1 \leq i \leq 3} x_i \underline{f}(e_i) + \sum_{1 \leq i < j < \leq 3} x_{ij} \underline{f}(e_i) \uparrow \underline{f}(e_j) + x_7 \underline{f}(e_1) \uparrow \underline{f}(e_2) \uparrow \underline{f}(e_3) \\
\underline{f}(M) &= x_0 + \sum_{1 \leq i \leq 3} x_i f(e_i) + \sum_{1 \leq i < j < \leq 3} x_{ij} f(e_i) \uparrow f(e_j) + x_7 f(e_1) \uparrow f(e_2) \uparrow f(e_3)
\end{aligned}$$

Observación 3.2.2.

1. $\underline{f}(\alpha) = \alpha, \quad$ *para todo* $\alpha \in \mathbb{R}$
2. $\underline{f}x = fx, \quad$ *para todo* $x \in E$
3. *La definición implica que $\underline{f}$ es lineal.*

Proposición 3.2.3. *Sea el operador inducido $\underline{f} : AG(3) \to AG(3)$, se cumple:*

1. *Lineal:* $\underline{f}(\alpha M + \beta N) = \alpha \underline{f}(M) + \beta \underline{f}(N), \ \forall M, N \in AG(3), \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$
2. *Preserva el producto exterior:* $\underline{f}(M \uparrow N) = \underline{f}(M) \uparrow \underline{f}(N), \ \forall M, N \in AG(3)$
3. *Preserva el grado:* $\underline{f}(\langle M \rangle_k) = \langle \underline{f}(M) \rangle_k, \ \forall M \in AG(3)$

Demostración. (1)
Sea $M, N \in AG(3)$ tal que:
$M = x_0 + x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 + x_4e_4 + x_5e_5 + x_6e_6 + x_7e_7$,
$N = y_0 + y_1e_1 + y_2e_2 + y_3e_3 + y_4e_4 + y_5e_5 + y_6e_6 + y_7e_7$, entonces:

$$\begin{aligned}
\underline{f}(\alpha M + \beta N) &= \underline{f}(\alpha(x_0 + x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 + x_4e_4 + x_5e_5 + x_6e_6 + x_7e_7)\\
&+ \beta(y_0 + y_1e_1 +_2 e_2 + y_3e_3 + y_4e_4 + y_5e_5 + y_6e_6 + y_7e_7))\\
&= \underline{f}(\alpha x_0 + \alpha x_1e_1 + \alpha x_2e_2 + \alpha x_3e_3 + \alpha x_4e_4 + \alpha x_5e_5 + \alpha x_6e_6 + \alpha x_7e_7\\
&+ \beta y_0 + \beta y_1e_1 + \beta y_2e_2 + \beta y_3e_3 + \beta y_4e_4 + \beta y_5e_5 + \beta y_6e_6 + \beta y_7e_7)\\
&= \alpha x_0 + \alpha\underline{f}(x_1e_1) + \alpha\underline{f}(x_2e_2) + \alpha\underline{f}(x_3e_3) + \alpha\underline{f}(x_4e_4) + \alpha\underline{f}(x_5e_5)\\
&+ \alpha\underline{f}(x_6e_6) + \alpha\underline{f}(x_7e_7) + \beta y_0 + \beta\underline{f}(y_1e_1) + \beta\underline{f}(y_2e_2) + \beta\underline{f}(y_3e_3)\\
&+ \beta\underline{f}(y_4e_4) + \beta\underline{f}(y_5e_5) + \beta\underline{f}(y_6e_6) + \beta\underline{f}(y_7e_7)\\
&= \alpha\underline{f}(x_0 + x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 + x_4e_4 + x_5e_5 + x_6e_6 + x_7e_7)\\
&+ \beta\underline{f}(y_0 + y_1e_1 +_2 e_2 + y_3e_3 + y_4e_4 + y_5e_5 + y_6e_6 + y_7e_7)\\
&= \alpha\underline{f}(M) + \beta\underline{f}(N)
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \underline{f}(\alpha M + \beta N) = \alpha\underline{f}(M) + \beta\underline{f}(N),\ \forall M, N \in AG(3)$

□

Demostración. (2)
Sea $M, N \in AG(3)$ tal que:

$$\begin{aligned}
M &= x_0 + \sum_{1\le i\le 3} x_ie_i + \sum_{1\le i<j<\le 3} x_{ij}e_ie_j + x_7e_7,\\
N &= y_0 + \sum_{1\le i\le 3} y_ie_i + \sum_{1\le i<j<\le 3} y_{ij}e_ie_j + y_7e_7,
\end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
\underline{f}(M\uparrow N) &= \underline{f}((x_0 + \sum_{1\le i\le 3} x_ie_i + \sum_{1\le i<j<\le 3} x_{ij}e_ie_j + x_7e_7)\\
&\uparrow (y_0 + \sum_{1\le i\le 3} y_ie_i + \sum_{1\le i<j<\le 3} y_{ij}e_ie_j + y_7e_7))\\
&= \underline{f}(x_0y_0 + \sum_{1\le i\le 3} x_0y_ie_i + \sum_{1\le i<j<\le 3} x_0y_{ij}e_ie_j + x_0y_7e_7 + \sum_{1\le i\le 3} x_iy_0e_i\\
&+ \sum_{1\le i\le 3} x_ie_i \uparrow \sum_{1\le i\le 3} y_ie_i + \sum_{1\le i\le 3} x_ie_i \uparrow \sum_{1\le i<j<\le 3} y_{ij}e_ie_j + \sum_{1\le i<j<\le 3} x_{ij}y_0e_ie_j\\
&+ \sum_{1\le i<j<\le 3} x_{ij}y_ie_ie_j \uparrow e_i + \sum_{1\le i<j<\le 3} x_{ij}y_7e_ie_j \uparrow e_7 + x_7y_0e_7)
\end{aligned}$$

$$= x_0y_0 + \sum_{1\leq i\leq 3} x_0y_i\underline{f}(e_i) + \sum_{1\leq i<j<\leq 3} x_0y_{ij}\underline{f}(e_ie_j) + x_0y_7\underline{f}(e_7) + \sum_{1\leq i\leq 3} x_iy_0\underline{f}(e_i)$$
$$+ \sum_{1\leq i\leq 3} x_i\underline{f}(e_i) \uparrow \sum_{1\leq i\leq 3} y_i\underline{f}(e_i) + \sum_{1\leq i\leq 3} x_i\underline{f}(e_i) \uparrow \sum_{1\leq i<j<\leq 3} y_{ij}\underline{f}(e_ie_j)$$
$$+ \sum_{1\leq i<j<\leq 3} x_{ij}y_0\underline{f}(e_ie_j) + \sum_{1\leq i<j<\leq 3} x_iy_i\underline{f}(e_ie_j \uparrow e_i) + \sum_{1\leq i<j<\leq 3} x_{ij}y_7\underline{f}(e_ie_j) \uparrow e_7$$
$$+ x_7y_0\underline{f}(e_7)$$
$$= (x_0 + \sum_{1\leq i\leq 3} x_i\underline{f}(e_i) + \sum_{1\leq i<j<\leq 3} x_{ij}\underline{f}(e_ie_j) + x_7\underline{f}(e_7))$$
$$\uparrow (y_0 + \sum_{1\leq i\leq 3} y_i\underline{f}(e_i) + \sum_{1\leq i<j<\leq 3} y_{ij}\underline{f}(e_ie_j) + y_7\underline{f}(e_7))$$
$$= \underline{f}(x_0 + \sum_{1\leq i\leq 3} x_ie_i + \sum_{1\leq i<j<\leq 3} x_{ij}e_ie_j + x_7e_7)$$
$$\uparrow \underline{f}(y_0 + \sum_{1\leq i\leq 3} y_ie_i + \sum_{1\leq i<j<\leq 3} y_{ij}e_ie_j + y_7e_7)$$
$$= \underline{f}(M) \uparrow \underline{f}(N)$$

Por lo tanto: $\underline{f}(M \uparrow N) = \underline{f}(M) \uparrow \underline{f}(N)$

□

Demostración. (3)

Sea $M \in AG(3)$ tal que:

$$M = \underbrace{x_0}_{\text{0-vector}} + \underbrace{\sum_{1\leq i\leq 3} x_ie_i}_{\text{1-vector}} + \underbrace{\sum_{1\leq i<j<\leq 3} x_{ij}e_ie_j}_{\text{2-vector}} + \underbrace{x_7e_7}_{\text{3-vector}}$$

Por proposición 3.2.3(1), 3.2.3(2), tenemos:

- Si $k = 0$, entonces: $\underline{f}(\langle M\rangle_0) = \langle \underline{f}(M)\rangle_0$

  En efecto:
  $\underline{f}(\langle M\rangle_0) = \underline{f}(x_0) = x_0 = \langle \underline{f}(M)\rangle_0$

- Si $k = 1$, entonces: $\underline{f}(\langle M\rangle_1) = \langle \underline{f}(M)\rangle_1$

En efecto:

$$\begin{aligned}
\underline{f}(\langle M\rangle_1) &= \underline{f}(\sum_{1\leq i\leq 3} x_i e_i) \\
&= \sum_{1\leq i\leq 3} x_i \underline{f}(e_i) \\
&= \langle x_0 + \sum_{1\leq i\leq 3} x_i \underline{f}(e_i) + \sum_{1\leq i<j<\leq 3} x_{ij}\underline{f}(e_i e_j) + x_7 \underline{f}(e_7)\rangle_1 \\
&= \langle \underline{f}(x_0 + \sum_{1\leq i\leq 3} x_i e_i + \sum_{1\leq i<j<\leq 3} x_{ij} e_i e_j + x_7 e_7)\rangle_1 \\
&= \langle \underline{f}(M)\rangle_1
\end{aligned}$$

- Si $k=2$, entonces: $\underline{f}(\langle M\rangle_2) = \langle \underline{f}(M)\rangle_2$
  En efecto:

$$\begin{aligned}
\underline{f}(\langle M\rangle_2) &= \underline{f}(\sum_{1\leq i<j<\leq 3} x_{ij} e_i e_j) \\
&= \sum_{1\leq i<j<\leq 3} x_{ij} \underline{f}(e_i e_j) \\
&= \langle x_0 + \sum_{1\leq i\leq 3} x_i \underline{f}(e_i) + \sum_{1\leq i<j<\leq 3} x_{ij}\underline{f}(e_i e_j) + x_7 \underline{f}(e_7)\rangle_2 \\
&= \langle \underline{f}(x_0 + \sum_{1\leq i\leq 3} x_i e_i + \sum_{1\leq i<j<\leq 3} x_{ij} e_i e_j + x_7 e_7)\rangle_2 \\
&= \langle \underline{f}(M)\rangle_2
\end{aligned}$$

- Si $k=3$, entonces: $\underline{f}(\langle M\rangle_3) = \langle \underline{f}(M)\rangle_3$
  En efecto:

$$\begin{aligned}
\underline{f}(\langle M\rangle_3) &= \underline{f}(x_7 e_7) \\
&= x_7 \underline{f}(e_7) \\
&= \langle x_0 + \sum_{1\leq i\leq 3} x_i \underline{f}(e_i) + \sum_{1\leq i<j<\leq 3} x_{ij}\underline{f}(e_i e_j) + x_7 \underline{f}(e_7)\rangle_3 \\
&= \langle \underline{f}(x_0 + \sum_{1\leq i\leq 3} x_i e_i + \sum_{1\leq i<j<\leq 3} x_{ij} e_i e_j + x_7 e_7)\rangle_3 \\
&= \langle \underline{f}(M)\rangle_3
\end{aligned}$$

Por lo tanto: $\underline{f}(\langle M\rangle_k) = \langle \underline{f}(M)\rangle_k$ □

Observación 3.2.4.

1. $\underline{f}(M \downarrow N) \neq \underline{f}(M) \downarrow \underline{f}(N),\ \forall M, N \in AG(3)$

2. *Como el adjunto* $\overline{\mathbf{f}}$ *es un operador lineal este induce un operador lineal denotado con el mismo símbolo* $\overline{f}$ *y se cumple:*

$$\overline{f}(x_1 \uparrow \ldots \uparrow x_k) = \overline{f}(x_1) \uparrow \ldots \uparrow \overline{f}(x_k)$$

Proposición 3.2.5. *Sea x,y,z vectores se cumple:*

1. $\underline{f}(x \uparrow y) = f(x) \uparrow f(y)$

2. $\underline{f}(x \uparrow y \uparrow z) = f(x) \uparrow f(y) \uparrow f(z) = (fx) \uparrow (fy) \uparrow (fz)$

3. $\underline{f}(x \uparrow y + x \uparrow z) = \underline{f}(x \uparrow y) + \underline{f}(x \uparrow z) = f(x) \uparrow f(y) + f(x) \uparrow f(z)$

Demostración. (1)
Por proposición 3.2.3(2) y por observación 3.2.2(2), tenemos:

$$\begin{aligned} \underline{f}(x \uparrow y) &= \underline{f}(x) \uparrow \underline{f}(y) \\ &= f(x) \uparrow f(y) \\ \Rightarrow \underline{f}(x \uparrow y) &= f(x) \uparrow f(y) \end{aligned}$$

□

Demostración. (2)
Por proposición 3.2.3(1), 3.2.3(2) y por observación 3.2.2(2), tenemos:

$$\begin{aligned} \underline{f}(x \uparrow y \uparrow z) &= \underline{f}[(x \uparrow y) \uparrow z] \\ &= \underline{f}(x \uparrow y) \uparrow \underline{f}(z) \\ &= \underline{f}(x) \uparrow \underline{f}(y) \uparrow \underline{f}(z) \\ &= f(x) \uparrow f(y) \uparrow f(z) \\ \Rightarrow \underline{f}(x \uparrow y \uparrow z) &= f(x) \uparrow f(y) \uparrow f(z) \end{aligned}$$

□

Demostración. (3)
Por proposición 3.2.3(1), 3.2.3(2) y por observación 3.2.2(2), tenemos:

$$\begin{aligned} \underline{f}(x \uparrow y + x \uparrow z) &= \underline{f}(x \uparrow y) + \underline{f}(x \uparrow z) \\ &= \underline{f}(x) \uparrow \underline{f}(y) + \underline{f}(x) \uparrow \underline{f}(z) \\ &= f(x) \uparrow f(y) + f(x) \uparrow f(z) \\ \Rightarrow \underline{f}(x \uparrow y + x \uparrow z) &= f(x) \uparrow f(y) + f(x) \uparrow f(z) \end{aligned}$$

□

Definición 3.2.6. *Sea $f : E \to E$ un operador lineal.*

$$\det f := (e_3e_2e_1)f(e_1) \uparrow f(e_2) \uparrow f(e_3)$$

donde $\det f$ *es llamado el determinante de* f *y es un escalar que depende de* f*.*

Proposición 3.2.7.

1. $\det f = \tau^{-1}\underline{f}(\tau)$
2. $\underline{f}(x \uparrow y \uparrow z) = (\det f)x \uparrow y \uparrow z$
3. $\det f = (x \uparrow y \uparrow z)^{-1} \cdot \underline{f}(x \uparrow y \uparrow z)$
4. $\det f = \dfrac{(fx) \downarrow [(fy) \times f(z)]}{x \downarrow (y \times z)}$

Demostración. (1)
Por proposición 2.4.3(4), 2.4.3(6), 3.2.5(2), tenemos:

$$\begin{aligned}
\det f &= (e_3e_2e_1)f(e_1) \uparrow f(e_2) \uparrow f(e_3) \\
&= \underbrace{-\tau}\, f(e_1) \uparrow f(e_2) \uparrow f(e_3) \\
&= \tau^{-1}f(e_1) \uparrow f(e_2) \uparrow f(e_3) \\
&= \tau^{-1}\underline{f}(e_1 \uparrow e_2 \uparrow e_3) \\
&= \tau^{-1}\underline{f}(e_1e_2e_3) \\
\Rightarrow \det f &= \tau^{-1}\underline{f}(\tau)
\end{aligned}$$

□

Demostración. (2)
Como $\tau^{-1} = -\tau$, $\tau(x \uparrow y \uparrow z) = (x \uparrow y \uparrow z)\tau$ y $x \uparrow y \uparrow z = \tau[x \downarrow (y \times z)]$, entonces:

$$\begin{aligned}
\underline{f}(x \uparrow y \uparrow z) &= \underline{f}(\tau[\underbrace{x}_{\text{1-vector}} \downarrow \underbrace{(y \times z)}_{\text{1-vector}}]) \\
&= x \downarrow (y \times z)\underline{f}(\tau) \\
&= \tau^{-1}\underbrace{\tau[x \downarrow (y \times z)]}\,\underline{f}(\tau) \\
&= -\tau(x \uparrow y \uparrow z)\underline{f}(\tau) \\
&= -(x \uparrow y \uparrow z)\tau\underline{f}(\tau) \\
&= -(x \uparrow y \uparrow z)\tau\tau\,\underbrace{\tau^{-1}\underline{f}(\tau)} \\
&= -(x \uparrow y \uparrow z)\tau^2(\det f) \\
&= -(x \uparrow y \uparrow z)(-1)(\det f) \\
&= (x \uparrow y \uparrow z)(\det f) \\
\Rightarrow \underline{f}(x \uparrow y \uparrow z) &= (\det f)(x \uparrow y \uparrow z)
\end{aligned}$$

$\square$

Demostración. (3)
Por proposición 3.2.7(2) y 2.3.8(7) tenemos:

$$\begin{aligned}
\underline{f}(x \uparrow y \uparrow z) &= (\det f)(x \uparrow y \uparrow z) \\
(x \uparrow y \uparrow z)^{-1}\underline{f}(x \uparrow y \uparrow z) &= (\det f)(x \uparrow y \uparrow z)^{-1}(x \uparrow y \uparrow z) \\
\Rightarrow \det f &= \underbrace{(x \uparrow y \uparrow z)^{-1}}_{3-vector}\ \underbrace{\underline{f}(x \uparrow y \uparrow z)}_{3-vector} \\
&= (x \uparrow y \uparrow z)^{-1} \downarrow \underline{f}(x \uparrow y \uparrow z) \\
\Rightarrow \det f &= (x \uparrow y \uparrow z)^{-1} \downarrow \underline{f}(x \uparrow y \uparrow z)
\end{aligned}$$

$\square$

Demostración. (4)
Por proposición 3.2.7 (2) y por ejercicio 2.7.3 tenemos:

$$\begin{aligned}
\underline{f}(x \uparrow y \uparrow z) &= (\det f)(x \uparrow y \uparrow z) \\
\underline{f}(x \uparrow y \uparrow z)(x \uparrow y \uparrow z)^{-1} &= (\det f)(x \uparrow y \uparrow z)(x \uparrow y \uparrow z)^{-1} \\
\Rightarrow \det f &= \underline{f}(x \uparrow y \uparrow z)(x \uparrow y \uparrow z)^{-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\det f &= ((fx) \uparrow (fy) \uparrow (fz))(x \uparrow y \uparrow z)^{-1} \\
&= (fx) \uparrow (fy) \uparrow (fz)\frac{1}{x \uparrow y \uparrow z} \\
&= \frac{\tau[(fx) \downarrow ((fy) \times (fz))]}{\tau[x \downarrow (y \times z)]} \\
&= \frac{(fx) \downarrow [(fy) \times (fz)]}{x \downarrow (y \times z)} \\
\Rightarrow \det f &= \frac{(fx) \downarrow [(fy) \times (fz)]}{x \downarrow (y \times z)}
\end{aligned}$$

$\square$

Proposición 3.2.8. *Sea* $f, g : E \to E$ *y* $\underline{f}, \underline{g} : AG(3) \to AG(3)$*, entonces:*

$$\underline{f \circ g} = \underline{f} \circ \underline{g}$$

Demostración.

- Sea x un 1-vector arbitrario

$$\begin{aligned}
(\underline{f \circ g})(x) &= f \circ g(x),\ \forall x \in E \\
&= f(g(x)) \\
&= \underline{f}(g(x)) \\
&= \underline{f}(\underline{g}(x)) = \underline{f} \circ \underline{g}(x) \\
\Rightarrow \underline{f \circ g} &= \underline{f} \circ \underline{g}
\end{aligned}$$

- Sea $x \uparrow y$ un 2-vector arbitrario

$$\begin{aligned}
\underline{f \circ g}(x \uparrow y) &= (f \circ g)(x) \uparrow (f \circ g)(y) \\
&= f(g(x)) \uparrow f(g(y)) \\
&= \underline{f}(g(x) \uparrow g(y)) \\
&= \underline{f}(\underline{g}(x \uparrow y)) \\
&= \underline{f} \circ \underline{g}(x \uparrow y) \\
\Rightarrow \underline{f \circ g} &= \underline{f} \circ \underline{g}
\end{aligned}$$

- Sea $x \uparrow y \uparrow z$ un 3-vector arbitrario

$$\begin{aligned}
\underline{f \circ g}(x \uparrow y \uparrow z) &= (f \circ g)(x) \uparrow (f \circ g)(y) \uparrow (f \circ g)(z) \\
&= (f(g(x))) \uparrow (f(g(y))) \uparrow (f(g(z))) \\
&= \underline{f}(g(x) \uparrow g(y) \uparrow g(z)) \\
&= \underline{f}(\underline{g}(x \uparrow y \uparrow z)) \\
&= \underline{f} \circ \underline{g}(x \uparrow y \uparrow z)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \underline{f \circ g} = \underline{f} \circ \underline{g}$$

Por lo tanto $\underline{f \circ g} = \underline{f} \circ \underline{g}$ $\square$

Proposición 3.2.9. *Sea $f, g : E \to E$, el determinante de fg es:*

$$\det(fg) = (\det f)(\det g)$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
\det(fg) = \det(f \circ g) &= \tau^{-1}(\underline{f \circ g}(\tau)) \\
&= \tau^{-1}(\underline{f} \circ \underline{g}(\tau)) \\
&= \tau^{-1}(\underline{f}(\underline{g}(\tau))) \\
&= \tau^{-1}\underline{f}(\tau\underbrace{\tau^{-1}g(\tau)}) \\
&= \tau^{-1}\underline{f}(\tau(\det g)) \\
&= \tau^{-1}\underline{f}((\det g)\tau) \\
&= \tau^{-1}(\det g)\underline{f}(\tau) \\
&= (\det g)\underbrace{\tau^{-1}\underline{f}(\tau)} \\
&= (\det g)(\det f) \\
\Rightarrow \det(fg) &= (\det f)(\det g)
\end{aligned}$$

□

3.3. Operadores Lineales no-singulares

Definición 3.3.1. *Un operador lineal $f : E \to E$ es llamado no-singular si $\underline{f}(\tau) \neq 0$.*

Proposición 3.3.2. *$f : E \to E$ es no-singular si y solo si* $\det f \neq 0$.

Demostración.

$$\begin{aligned}
\text{Como } f \text{ es no singular} &\Leftrightarrow \underline{f}(\tau) \neq 0 \\
&\Leftrightarrow \tau^{-1}\underline{f}(\tau) \neq 0 \\
&\Leftrightarrow \det f \neq 0
\end{aligned}$$

□

Definición 3.3.3. *Sea $f : E \to E$ un operador lineal no-singular. Se dice que f es inversible si existe un operador lineal f^{-1} llamado "la inversa de f" tal que:*
$ff^{-1} = f^{-1}f = I$.

Observación 3.3.4.

1. *I es el operador identidad definido por* $I(x) = x,\ \forall x \in E$

2. $f^{-1}f(x) = x,\ \forall x \in E$

Proposición 3.3.5. *Sea $f : E \to E$ un operador lineal adjunto y no-singular. $\overline{f}$ es el operador lineal inducido de f, se cumple:*

1. $f^{-1}(y) = \dfrac{\overline{f}(y\tau)}{\overline{f}(\tau)}$

2. $f^{-1}(y) = \dfrac{\overline{f}(y\tau)}{\tau(\det f))}$

Demostración. (1)
Por proposición 2.3.8(5), además $y \downarrow f(x) = \overline{f}(y) \downarrow x$ y $\tau y = y\tau, \forall y \in E$, tenemos:

$$
\begin{aligned}
x\overline{f}(\tau) &= x\overline{f}(e_1e_2e_3)\\
&= x\overline{f}(e_1 \uparrow e_2 \uparrow e_3)\\
&= \underbrace{x}_{\text{1-vector}}\ \underbrace{\left[\overline{f}(e_1) \uparrow \overline{f}(e_2) \uparrow \overline{f}(e_3)\right]}_{\text{3-vector}}\\
&= x \downarrow \left[\overline{f}(e_1) \uparrow \overline{f}(e_2) \uparrow \overline{f}(e_3\right]\\
&= [\overline{f}(e_1) \uparrow \overline{f}(e_2)](\overline{f}(e_3) \downarrow x) - [\overline{f}(e_1) \uparrow \overline{f}(e_3)](\overline{f}(e_2) \downarrow x) + [\overline{f}(e_2) \uparrow \overline{f}(e_3)](\overline{f}(e_1) \downarrow x)\\
&= \overline{f}(\underbrace{e_1 \uparrow e_2}_{\tau e_3})(x \downarrow \overline{f}(e_3)) - \overline{f}(\underbrace{e_1 \uparrow e_3}_{-\tau e_2})(x \downarrow \overline{f}(e_2)) + \overline{f}(\underbrace{e_2 \uparrow e_3}_{\tau e_1})(x \downarrow \overline{f}(e_1))\\
&= \overline{f}(\tau e_3)(f(x) \downarrow e_3) - \overline{f}(-\tau e_2)(f(x) \downarrow e_2) + \overline{f}(\tau e_1)(f(x) \downarrow e_1)\\
&= \overline{f}(\tau e_1)(f(x) \downarrow e_1) + \overline{f}(\tau e_2)(f(x) \downarrow e_2) + \overline{f}(\tau e_3)(f(x) \downarrow e_3)\\
&= \overline{f}[\tau e_1(f(x) \downarrow e_1)] + \overline{f}[\tau e_2(f(x) \downarrow e_2)] + \overline{f}[\tau e_3(f(x) \downarrow e_3)]\\
&= \overline{f}[\tau(f(x) \downarrow e_1)e_1] + \overline{f}[\tau(f(x) \downarrow e_2)e_2] + \overline{f}[\tau(f(x) \downarrow e_3)e_3]\\
&= \overline{f}[\tau(f(x) \downarrow e_1)e_1 + \tau(f(x) \downarrow e_2)e_2 + \tau(f(x) \downarrow e_3)e_3]\\
&= \overline{f}[\tau((f(x) \downarrow e_1)e_1 + (f(x) \downarrow e_2)e_2 + (f(x) \downarrow e_3)e_3)]\\
&= \overline{f}\left(\tau\sum_{i=1}^{3}(f(x) \downarrow e_i)e_i\right)\\
&= \overline{f}(\tau f(x))
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
\text{Entonces: } x\overline{f}(\tau) &= \overline{f}(\tau f(x)) \\
\frac{x\overline{f}(\tau)}{\overline{f}(\tau)} &= \frac{\overline{f}(\tau f(x))}{\overline{f}(\tau)} \\
x &= \frac{\overline{f}(\tau f(x))}{\overline{f}(\tau)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Si } y = f(x) &\Rightarrow f^{-1}(y) = f^{-1}f(x) = x \\
&\Rightarrow f^{-1}(y) = x \\
&\Rightarrow f^{-1}(y) = \frac{\overline{f}(\tau f(x))}{\overline{f}(\tau)} \\
&\quad f^{-1}(y) = \frac{\overline{f}(\tau y)}{\overline{f}(\tau)} \\
&\qquad\qquad = \frac{\overline{f}(y\tau)}{\overline{f}(\tau)} \\
&\Rightarrow f^{-1}(y) = \frac{\overline{f}(y\tau)}{\overline{f}(\tau)}
\end{aligned}$$

□

Demostración. (2)
Como $\det f = \tau^{-1}\overline{f}(\tau)$, donde $\overline{f}$ es el operador lineal inducido de f

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \det f = \tau^{-1}\overline{f}(\tau) \\
&\Rightarrow \tau(\det f) = \tau\tau^{-1}\overline{f}(\tau) \\
&\qquad\qquad\quad = \overline{f}(\tau) \\
&\Rightarrow \tau(\det f) = \overline{f}(\tau)
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Luego por proposición 3.3.5(1), tenemos:

$$f^{-1}(y) = \frac{\overline{f}(y\tau)}{\tau(\det f)}$$

□

Ejercicio 3.3.6. *Probar:* $\det(f^{-1}) = (\det f)^{-1}$

Demostración.
Por proposición 3.3.5(1) y $-\tau = \tau^{-1}$, tenemos:

$$\det(f^{-1}) = \tau^{-1}\underline{f}^{-1}(\tau) = \tau^{-1}\frac{\underline{f}(\tau\tau)}{\underline{f}(\tau)} = \tau^{-1}\frac{\underline{f}(\tau^2)}{\underline{f}(\tau)} = \tau^{-1}\frac{\underline{f}(-1)}{\underline{f}(\tau)}$$

$$= \tau^{-1}\frac{(-1)}{\underline{f}(\tau)} = \frac{-\tau^{-1}}{\underline{f}(\tau)} = \frac{\tau}{\underline{f}(\tau)} = \frac{\tau^{-1}\tau}{\tau^{-1}\underline{f}(\tau)} = \frac{1}{\tau^{-1}\underline{f}(\tau)}$$

$$= (\tau^{-1}\underline{f}(\tau))^{-1} = (\det f)^{-1}$$

$$\Rightarrow \det(f^{-1}) = (\det f)^{-1}$$

□

3.4. Representación Matricial de Operadores Lineales

Observación 3.4.1.

1. *Sea* $\{e_1, e_2, e_3\}$ *la base canónica de* E *definido por la condición ortonormal*

$$e_i \downarrow e_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & , si\ i = j \\ 0 & , si\ i \neq j \end{cases} \qquad , donde\ i, j \in \{1, 2, 3\}$$

2. *Cualquier* $x \in E$ *puede ser representado como :*

$$x = \sum_{k=1}^{3} x_k e_x$$

Las componentes x_k *son de la forma:* $x_k = e_k \downarrow x$.
Luego:

$$x = \sum_{k=1}^{3} x_k e_k = \sum_{k=1}^{3} (e_k \downarrow x)e_k = \sum_{k=1}^{3} (x \downarrow e_k)e_k$$

$$\Rightarrow x = \sum_{k=1}^{3} (x \downarrow e_k)e_k$$

3. *Un operador lineal f transforma cada vector e_k de la base estándar en un vector f_k, que puede ser expresado en términos de la base estándar de la siguiente manera:*

$$f_k = fe_k = \sum_{j=1}^{3} e_j f_{jk}$$

Definición 3.4.2. $[f] = [f_{jk}]$ *es llamado la matriz de f en la base canónica, donde f_{jk} es llamado un elemento de la matriz del operador f.*

Observación 3.4.3.

1. *Los elementos de la matriz f están dados por:*

$$f_{jk} = e_j \downarrow (fe_k) = e_j \downarrow f_k, \qquad k, j \in \{1, 2, 3\}$$

2. *La matriz completa se escribe de la siguiente manera:*

$$[f] = [f_{jk}] = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{bmatrix}$$

3. *Un operador lineal está completamente determinado por una matriz en una base dada y una matriz determina la transformación de cualquier vector*

$$fx = \sum_{k=1}^{3} (fe_k)x_k = \sum_{k=1}^{3} \left(\sum_{j=1}^{3} e_j f_{jk} \right) x_k, \qquad k, j \in \{1, 2, 3\}$$

4. *La ecuación $fx = y$ es equivalente a la ecuación matricial $\sum_{k=1}^{3} f_{jk} x_k = y_j$, donde $j \in \{1, 2, 3\}$.*
En efecto:

$$\begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11}x_1 + & f_{12}x_2 + & f_{13}x_3 \\ f_{21}x_1 + & f_{22}x_2 + & f_{23}x_3 \\ f_{31}x_1 + & f_{32}x_2 + & f_{33}x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

5. *El operador suma $f + g$ corresponde a la matriz suma*

$$f_{jk} + g_{jk} = e_j \downarrow (fe_k + ge_k), \;\; k, j \in \{1, 2, 3\}$$

6. *El operador producto gf corresponde a la matriz producto*

$$\sum_{j=1}^{3} g_{ij} f_{jk} = e_i \downarrow (gfe_k)$$

$$gfe_k = \sum_{j=1}^{3} (ge_j) f_{jk} = \sum_{i=1}^{3} e_i \left(\sum g_{ij} f_{jk} \right)$$

7. *El producto de matrices es igual a la matriz del operador producto:*

$$[g][f] = [gf]$$

8. *La matriz identidad correspondiente al operador identidad será:*

$$e_i \downarrow I(e_k) = e_i \downarrow e_k = \delta_{ik}$$

9. $If = f$ *corresponde a la ecuación matricial:*

$$\sum_{j=1}^{3} \delta_{ij} f_{jk} = f_{ik} \ \text{ ó } \ [I][f] = [f]$$

10. $f^{-1}f = I$ *corresponde a la ecuación matricial:*

$$\sum_{j=1}^{3} f_{ij}^{-1} f_{jk} = \delta_{ik} \ \text{ ó } \ [f^{-1}][f] = [I]$$

Definición 3.4.4. $\det f = \det[f]$

3.5. Operadores Simétricos y Antisimétricos

3.5.1. Operadores Antisimétricos

Definición 3.5.1. *Un operador lineal $A : E \to E$ es antisimétrico si :*

$$\overline{A} = -A$$

Proposición 3.5.2. $A : E \to E$ *es un operador antisimétrico si y solo si:*

$$Ax = x \downarrow B \ \text{ , donde } B \text{ es bivector}$$

Demostración.
Probaremos que si A es un operador antisimétrico implica que $Ax = x \downarrow B$
Como A es operador lineal entonces:

$$a_k = Ae_k = \sum_{j=1}^{3} e_j B_{jk}$$

En términos de la base estándar el bivector esta dado por:

$$B = \sum_{k,j=1}^{3} e_k \uparrow e_j B_{jk} \ \text{ ;donde } B_{jk} \in \mathbb{R}$$

Por proposición 2.6.3, tenemos:

$$\text{Si } B_{ij} = -B_{ji} \text{ entonces } B = \sum_{i,j=1}^{3} \frac{1}{2} B_{ij} e_i \uparrow e_j$$

En este caso tenemos:

$$B = \sum_{k,j=1}^{3} \frac{1}{2} e_k \uparrow e_j B_{jk} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{3} e_k \uparrow (Ae_k) = \sum_{k=1}^{3} \frac{1}{2} e_k \uparrow a_k$$

Por las definiciones de operador adjunto, operador antisimétrico y además por el ejercicio 2.3.17, tenemos:

$$\begin{aligned}
\underbrace{e_j}_{\text{1-vector}} \downarrow \underbrace{B}_{\text{2-vector}} &= e_j \downarrow \sum_{k=1}^{3} \frac{1}{2} (e_k \uparrow a_k) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{3} e_j \downarrow (e_k \uparrow a_k) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{3} [(e_j \downarrow e_k) a_k - (\overbrace{\underbrace{e_j}_{\text{1-vector}} \downarrow \underbrace{a_k}_{\text{1-vector}}}^{\in \mathbb{R}}) e_k] \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{3} [(e_j \downarrow e_k) A(e_k) - (e_j \downarrow Ae_k) e_k] \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{3} [(e_j \downarrow e_k) A(e_k) - (\overbrace{\underbrace{\overline{A}(e_j)}_{\text{1-vector}} \downarrow \underbrace{e_k}_{\text{1-vector}}}^{\in \mathbb{R}}) e_k] \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{3} [\delta_{jk} A(e_k) - (\overline{A}(e_j) \downarrow e_k) e_k] \\
&= \frac{1}{2} [A(e_j) - \overline{A}(e_j)] \\
&= \frac{1}{2} [A(e_j) - (-A)(e_j)] \\
&= \frac{1}{2} [A(e_j) + A(e_j)] \\
&= A(e_j) \\
\Rightarrow e_j \downarrow B &= A(e_j)
\end{aligned}$$

Como se cumple para los los vectores canónicos, por la linealidad el resultado es en general verdadero.

Recíprocamente si $Ax = x \downarrow B$ implica que A es operador antisimétrico.
Por ejercicio 2.3.20, tenemos:

$$\begin{aligned} y \downarrow (Ax) &= y \downarrow (x \downarrow B) \\ &= (y \uparrow x) \downarrow B \\ &= -(x \uparrow y) \downarrow B \\ &= -x \downarrow (y \downarrow B) \\ &= \underbrace{-x}_{\text{1-vector}} \downarrow \underbrace{Ay}_{\text{1-vector}} \\ &= -Ay \downarrow x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow y \downarrow (Ax) &= -A(y) \downarrow x \\ \Rightarrow \overline{A} &= -A \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ A es un operador antisimétrico □

3.5.2. Autovalores y Autovectores

Definición 3.5.3. *Sea $f : E \to E$ un operador lineal, el vector $x \neq 0$ es llamado el autovector asociado al autovalor λ si*

$$f(x) = \lambda x \tag{3.2}$$

donde $\lambda \in \mathbb{R}$.

Observación 3.5.4.

1. *Cualquier múltiplo de x es también un autovector de f.*
2. *La ecuación* (3.2) *puede ser escrito en la forma:* $(f - \lambda)(x) = 0$.
3. *Por álgebra lineal sabemos que $f - \lambda$ es singular, entonces por la definición de operador no-singular* $\det(f - \lambda) = 0$.

Proposición 3.5.5.

$$\det(f - \lambda) = \frac{(f_1 - \lambda e_1) \uparrow (f_2 - \lambda e_2) \uparrow (f_3 - \lambda e_3)}{e_1 e_2 e_3} \tag{3.3}$$

Demostración. :

Sabemos que:

$$f_k = f(e_k) = \sum_{j=1}^{3} e_j f_{jk}$$

Como $f_k = f(e_k)$, tenemos:

$$
\begin{aligned}
\det(f-\lambda) &= \tau^{-1}(\underline{f-\lambda})(\tau) \\
&= \frac{1}{\tau}(\underline{f-\lambda})(\tau) \\
&= \frac{(\underline{f-\lambda})(e_1e_2e_3)}{e_1e_2e_3} \\
&= \frac{(\underline{f-\lambda})(e_1 \uparrow e_2 \uparrow e_3)}{e_1e_2e_3} \\
&= \frac{(f-\lambda)e_1 \uparrow (f-\lambda)e_2 \uparrow (f-\lambda)e_3}{e_1e_2e_3} \\
&= \frac{f(e_1)-\lambda e_1 \uparrow f(e_2)-\lambda e_2 \uparrow f(e_3)-\lambda e_3}{e_1e_2e_3} \\
&= \frac{(f_1-\lambda e_1) \uparrow (f_2-\lambda e_2) \uparrow (f_3-\lambda e_3)}{e_1e_2e_3} \\
\Rightarrow \det(f-\lambda) &= \frac{(f_1-\lambda e_1) \uparrow (f_2-\lambda e_2) \uparrow (f_3-\lambda e_3)}{e_1e_2e_3}
\end{aligned}
$$

□

Observación 3.5.6.

1. *La ecuación* (3.3) *es llamado el polinomio característico de f.*
2. *De la observación 3.5.4 (3) y la proposición 3.5.5 tenemos:*

$$\det(f-\lambda) = \frac{(f_1-\lambda e_1) \uparrow (f_2-\lambda e_2) \uparrow (f_3-\lambda e_3)}{e_1e_2e_3} = 0 \qquad (3.4)$$

Proposición 3.5.7. *La ecuación*(3.4) *se puede escribir en la forma:*

$$\lambda^3 - \alpha_1\lambda^2 + \alpha_2\lambda - \alpha_3 = 0 \tag{3.5}$$

donde:

$$\begin{aligned}
&\alpha_1 = e_1 \downarrow f_1 + e_2 \downarrow f_2 + e_3 \downarrow f_3 = f_{11} + f_{12} + f_{33} \\
&\alpha_2 = (e_3 \uparrow e_2) \downarrow (f_2 \uparrow f_3) + (e_3 \uparrow e_1) \downarrow (f_1 \uparrow f_3) + (e_2 \uparrow e_1) \downarrow (f_1 \uparrow f_2) \\
&\alpha_3 = (e_3 \uparrow e_2 \uparrow e_1) \downarrow (f_1 \uparrow f_2 \uparrow f_3)
\end{aligned}$$

Demostración.
Sabemos que:

$$\det(f-\lambda) = \frac{\overbrace{(f_1 - \lambda e_1)}^{\text{1-vector}} \uparrow \overbrace{(f_2 - \lambda e_2)}^{\text{1-vector}} \uparrow (f_3 - \lambda e_3)}{e_1 e_2 e_3}$$

$$\Rightarrow \det(f-\lambda) = \frac{\frac{1}{2}[(f_1 - \lambda e_1)(f_2 - \lambda e_2) - (f_2 - \lambda e_2)(f_1 - \lambda e_1)] \uparrow (f_3 - \lambda e_3)}{e_1 e_2 e_3}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}[f_1 f_2 - f_1(\lambda e_2) - (\lambda e_1) f_2 + \lambda^2 e_1 e_2 - (f_2 f_1 - f_2(\lambda e_1) - (\lambda e_2) f_1 + \lambda^2 e_2 e_1)] \uparrow (f_3 - \lambda e_3)}{e_1 e_2 e_3}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}[f_1 f_2 - f_2 f_1 - f_1(\lambda e_2) - (\lambda e_1) f_2 + \lambda^2 e_1 e_2 + f_2(\lambda e_1) + (\lambda e_2) f_1 - \lambda^2 e_2 e_1)] \uparrow (f_3 - \lambda e_3)}{e_1 e_2 e_3}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}[f_1 f_2 - f_2 f_1 - f_1(\lambda e_2) - (\lambda e_1) f_2 + \lambda^2 e_1 e_2 + f_2(\lambda e_1) + (\lambda e_2) f_1 - \lambda^2(-e_1 e_2)] \uparrow (f_3 - \lambda e_3)}{e_1 e_2 e_3}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}[f_1 f_2 - f_2 f_1 - \lambda(f_1 e_2) + \lambda(e_2 f_1) - \lambda(e_1 f_2) + \lambda(f_2 e_1) + 2\lambda^2 e_1 e_2] \uparrow (f_3 - \lambda e_3)}{e_1 e_2 e_3}$$

$$= \frac{\left[\frac{1}{2}(f_1f_2 - f_2f_1) + \frac{\lambda}{2}(e_2f_1 - f_1e_2) + \frac{\lambda}{2}(f_2e_1 - e_1f_2) + \frac{2}{2}\lambda^2 e_1e_2\right] \uparrow (f_3 - \lambda e_3)}{e_1e_2e_3}$$

$$= \frac{[f_1 \uparrow f_2 + \lambda(e_2 \uparrow f_1) + \lambda(f_2 \uparrow e_1) + \lambda^2 e_1e_2] \uparrow (f_3 - \lambda e_3)}{e_1e_2e_3}$$

$$= \frac{(f_1 \uparrow f_2) \uparrow (f_3 - \lambda e_3) + \lambda(e_2 \uparrow f_1) \uparrow (f_3 - \lambda e_3) + \lambda(f_2 \uparrow e_1) \uparrow (f_3 - \lambda e_3)}{e_1e_2e_3}$$

$$+ \frac{\lambda^2 e_1e_2 \uparrow (f_3 - \lambda e_3)}{e_1e_2e_3}$$

$$= \frac{(f_1 \uparrow f_2) \uparrow f_3 - \lambda(f_1 \uparrow f_2) \uparrow e_3 + \lambda(e_2 \uparrow f_1) \uparrow f_3 - \lambda^2(e_2 \uparrow f_1) \uparrow e_3}{e_1e_2e_3}$$

$$+ \frac{\lambda(f_2 \uparrow e_1) \uparrow f_3 - \lambda^2(f_2 \uparrow e_1) \uparrow e_3 + \lambda^2 e_1e_2 \uparrow f_3 - \lambda^3(e_1e_2) \uparrow e_3}{e_1e_2e_3}$$

$$= \frac{(f_1 \uparrow f_2) \uparrow f_3}{e_1e_2e_3} + \frac{-\lambda^3(e_1e_2e_3) + \lambda^2[(e_1e_2) \uparrow f_3 - (f_2 \uparrow e_1) \uparrow e_3 - (e_2 \uparrow f_1) \uparrow e_3]}{e_1e_2e_3}$$

$$+ \frac{-\lambda[(f_1 \uparrow f_2) \uparrow e_3 - (e_2 \uparrow f_1) \uparrow f_3 - (f_2 \uparrow e_1) \uparrow f_3]}{e_1e_2e_3}$$

$$= (e_1e_2e_3)^{-1}[(f_1 \uparrow f_2) \uparrow f_3 - \lambda^3(e_1e_2e_3) + \lambda^2((e_1e_2) \uparrow f_3 - (f_2 \uparrow e_1) \uparrow e_3 - (e_2 \uparrow f_1) \uparrow e_3)$$

$$- \lambda((f_1 \uparrow f_2) \uparrow e_3 - (e_2 \uparrow f_1) \uparrow f_3 - (f_2 \uparrow e_1) \uparrow f_3)]$$

$$= (e_3e_2e_1)[(f_1 \uparrow f_2) \uparrow f_3 - \lambda^3(e_1e_2e_3) + \lambda^2((e_1e_2) \uparrow f_3 - (f_2 \uparrow e_1) \uparrow e_3 - (e_2 \uparrow f_1) \uparrow e_3)$$

$$-\lambda((f_1 \uparrow f_2) \uparrow e_3 - (e_2 \uparrow f_1) \uparrow f_3 - (f_2 \uparrow e_1) \uparrow f_3)]$$

$$= -\lambda^3(e_3e_2e_1)(e_1e_2e_3) + \lambda^2(e_3e_2e_1)[(e_1e_2) \uparrow f_3 - (f_2 \uparrow e_1) \uparrow e_3 - (e_2 \uparrow f_1) \uparrow e_3]$$

$$- \lambda(e_3e_2e_1)[(f_1 \uparrow f_2) \uparrow e_3 - (e_2 \uparrow f_1) \uparrow f_3 - (f_2 \uparrow e_1) \uparrow f_3] + (e_3e_2e_1)(f_1 \uparrow f_2) \uparrow f_3$$

$$= -\lambda^3 + \lambda^2\boldsymbol{(e_3e_2e_1)[(e_1e_2)\uparrow f_3]} - \lambda^2\boldsymbol{(e_3e_2e_1)[(f_2\uparrow e_1)\uparrow e_3]}$$

$$- \lambda^2\boldsymbol{(e_3e_2e_1)[(e_2\uparrow f_1)\uparrow e_3]} - \lambda\boldsymbol{(e_3e_2e_1)[(f_1\uparrow f_2)\uparrow e_3]} + \lambda\boldsymbol{(e_3e_2e_1)[(e_2\uparrow f_1)\uparrow f_3]}$$

$$+ \lambda\boldsymbol{(e_3e_2e_1)[(f_2\uparrow e_1)\uparrow f_3]} + (e_3e_2e_1)(f_1\uparrow f_2)\uparrow f_3$$

$$= -\lambda^3 + \lambda^2\boldsymbol{(e_3\downarrow f_3)} - \lambda^2\boldsymbol{(-e_2\downarrow f_2)} - \lambda^2\boldsymbol{(-e_1\downarrow f_1)} - \lambda\boldsymbol{[(e_2\uparrow e_1)\downarrow(f_1\uparrow f_2)]}$$

$$+ \lambda\boldsymbol{[-(e_3\uparrow e_1)\downarrow(f_1\uparrow f_3)]} + \lambda\boldsymbol{[-(e_3\uparrow e_2)\downarrow(f_2\uparrow f_3)]} + (e_3e_2e_1)(f_1\uparrow f_2)\uparrow f_3$$

$$= -\lambda^3 + \lambda^2(e_3\downarrow f_3 + e_2\downarrow f_2 + e_1\downarrow f_1) - \lambda[(e_2\uparrow e_1)\downarrow(f_1\uparrow f_2) + (e_3\uparrow e_1)\downarrow(f_1\uparrow f_3)$$

$$+ (e_3\uparrow e_2)\downarrow(f_2\uparrow f_3)] + (e_3e_2e_1)(f_1\uparrow f_2)\uparrow f_3$$

$$= -\lambda^3 + \lambda^2(e_1\downarrow f_1 + e_2\downarrow f_2 + e_3\downarrow f_3) - \lambda[(e_3\uparrow e_2)\downarrow(f_2\uparrow f_3) + (e_3\uparrow e_1)\downarrow(f_1\uparrow f_3)$$

$$+ (e_2\uparrow e_1)\downarrow(f_1\uparrow f_2)] + (e_3e_2e_1)(f_1\uparrow f_2)\uparrow f_3$$

$$\lambda^3 - \lambda^2[\underbrace{e_1\downarrow f_1 + e_2\downarrow f_2 + e_3\downarrow f_3}_{\alpha_1}] + \lambda[\underbrace{(e_3\uparrow e_2)\downarrow(f_2\uparrow f_3) + (e_3\uparrow e_1)\downarrow(f_1\uparrow f_3) + (e_2\uparrow e_1)\downarrow(f_1\uparrow f_2)}_{\alpha_2}]$$

$$-\underbrace{(e_3e_2e_1)(f_1\uparrow f_2\uparrow f_3)}_{\alpha_3} = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^3 - \alpha_1\lambda^2 + \alpha_2\lambda - \alpha_3 = 0$$

Donde:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= e_1\downarrow f_1 + e_2\downarrow f_2 + e_3\downarrow f_3 = f_{11} + f_{12} + f_{33}\\
\alpha_2 &= (e_3\uparrow e_2)\downarrow(f_2\uparrow f_3) + (e_3\uparrow e_1)\downarrow(f_1\uparrow f_3) + (e_2\uparrow e_1)\downarrow(f_1\uparrow f_2)\\
\alpha_3 &= (e_3\uparrow e_2\uparrow e_1)\downarrow(f_1\uparrow f_2\uparrow f_3)
\end{aligned}$$

Por proposición 2.4.4(1) y por observación 2.3.12(2) $-\tau = e_3e_2e_1$, tenemos:

$$\begin{aligned}
\bullet\ \boldsymbol{(e_3e_2e_1)[(e_1e_2)\uparrow f_3]} &= -e_1e_2e_3[(e_1e_2)\uparrow f_3] \\
&= -e_1e_2e_3[f_3\uparrow(e_1e_2)] \\
&= -f_3\downarrow[(e_1e_2e_3)(e_1e_2)] \\
&= -f_3\downarrow[e_1(-e_3e_2)(-e_2e_1)] \\
&= -f_3\downarrow[(e_1e_3)e_1] \\
&= -f_3\downarrow[(-e_3e_1)e_1] \\
&= -f_3\downarrow -e_3 \\
&= f_3\downarrow e_3 \\
\boldsymbol{(e_3e_2e_1)[(e_1e_2)\uparrow f_3]} &= \boldsymbol{e_3\downarrow f_3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bullet\ \boldsymbol{(e_3e_2e_1)[(f_2\uparrow e_1)\uparrow e_3]} &= -e_1e_2e_3[f_2\uparrow(e_1\uparrow e_3)] \\
&= -e_1e_2e_3[f_2\uparrow(e_1e_3)] \\
&= -f_2\downarrow[(e_1e_2e_3)(e_1e_3)] \\
&= -f_2\downarrow[(e_1e_2e_3)(-e_3e_1)] \\
&= -f_2\downarrow[(-e_1e_2)e_1] \\
&= -f_2\downarrow[(e_2e_1)e_1] \\
&= -f_2\downarrow e_2 \\
\boldsymbol{(e_3e_2e_1)[(f_2\uparrow e_1)\uparrow e_3]} &= \boldsymbol{-e_2\downarrow f_2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bullet\ \boldsymbol{(e_3e_2e_1)[(e_2\uparrow f_1)\uparrow e_3]} &= -e_1e_2e_3[(-f_1\uparrow e_2)\uparrow e_3)] \\
&= e_1e_2e_3[f_1\uparrow(e_2\uparrow e_3)] \\
&= e_1e_2e_3[f_1\uparrow(e_2e_3)] \\
&= f_1\downarrow[(e_1e_2e_3)(e_2e_3)] \\
&= f_1\downarrow[(e_1e_2e_3)(-e_3e_2)] \\
&= f_1\downarrow[(-e_1e_2)e_2] \\
&= f_1\downarrow(-e_1) \\
\boldsymbol{(e_3e_2e_1)[(e_2\uparrow f_1)\uparrow e_3]} &= \boldsymbol{-e_1\downarrow f_1}
\end{aligned}$$

Por proposición 2.4.4(1), 2.3.8(5), 2.3.8(6) y por ejercicio 2.3.19, tenemos:

- $$\begin{aligned}
\boldsymbol{(e_3e_2e_1)[(f_1 \uparrow f_2) \uparrow e_3]} &= -e_1e_2e_3[e_3 \uparrow (f_1 \uparrow f_2)] \\
&= -e_3 \downarrow [\underbrace{(e_1e_2e_3)}_{\text{3-vector}}\underbrace{(f_1 \uparrow f_2)}_{\text{2-vector}}] \\
&= -e_3 \downarrow [(e_1e_2e_3) \downarrow (f_1 \uparrow f_2)] \\
&= -[e_3 \downarrow (e_1e_2e_3)] \downarrow (f_1 \uparrow f_2) \\
&= -(e_3e_1e_2e_3) \downarrow (f_1 \uparrow f_2) \\
&= -(-e_1e_3)(-e_3e_2) \downarrow (f_1 \uparrow f_2) \\
&= -e_1e_2 \downarrow (f_1 \uparrow f_2) \\
&= -(e_1 \uparrow e_2) \downarrow (f_1 \uparrow f_2) \\
\boldsymbol{(e_3e_2e_1)[(f_1 \uparrow f_2) \uparrow e_3]} &= \boldsymbol{(e_2 \uparrow e_1) \downarrow (f_1 \uparrow f_2)}
\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}
\boldsymbol{(e_3e_2e_1)[(e_2 \uparrow f_1) \uparrow f_3]} &= -e_1e_2e_3[e_2 \uparrow (f_1 \uparrow f_3)] \\
&= -e_2 \downarrow [\underbrace{(e_1e_2e_3)}_{\text{3-vector}}\underbrace{(f_1 \uparrow f_3)}_{\text{2-vector}}] \\
&= -e_2 \downarrow [(e_1e_2e_3) \downarrow (f_1 \uparrow f_3)] \\
&= -[e_2 \downarrow (e_1e_2e_3)] \downarrow (f_1 \uparrow f_3) \\
&= -(e_2e_1e_2e_3) \downarrow (f_1 \uparrow f_3) \\
&= -(-e_1e_2)(e_2e_3) \downarrow (f_1 \uparrow f_3) \\
&= e_1e_3 \downarrow (f_1 \uparrow f_3) \\
&= (e_1 \uparrow e_3) \downarrow (f_1 \uparrow f_3) \\
\boldsymbol{(e_3e_2e_1)[(e_2 \uparrow f_1) \uparrow f_3]} &= \boldsymbol{-(e_3 \uparrow e_1) \downarrow (f_1 \uparrow f_3)}
\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}
\boldsymbol{(e_3e_2e_1)[(f_2 \uparrow e_1) \uparrow f_3]} &= -e_1e_2e_3[(-e_1 \uparrow f_2) \uparrow f_3] \\
&= e_1e_2e_3[(e_1 \uparrow f_2) \uparrow f_3] \\
&= e_1e_2e_3[e_1 \uparrow (f_2 \uparrow f_3)] \\
&= e_1 \downarrow [\underbrace{(e_1e_2e_3)}_{\text{3-vector}}\underbrace{(f_2 \uparrow f_3)}_{\text{2-vector}}] \\
&= e_1 \downarrow [(e_1e_2e_3) \downarrow (f_2 \uparrow f_3)] \\
&= [e_1 \downarrow (e_1e_2e_3)] \downarrow (f_2 \uparrow f_3) \\
&= (e_1e_1e_2e_3) \uparrow (f_2 \downarrow f_3) \\
&= e_2e_3 \downarrow (f_2 \uparrow f_3) \\
&= (e_2 \uparrow e_3) \downarrow (f_2 \uparrow f_3) \\
\boldsymbol{(e_3e_2e_1)[(f_2 \uparrow e_1) \uparrow f_3]} &= \boldsymbol{-(e_3 \uparrow e_2) \downarrow (f_2 \uparrow f_3)}
\end{aligned}$$

□

Observación 3.5.8.

1. *Las raíces de la ecuación* (3.5) *son llamados autovalores.*

Proposición 3.5.9. *Las componentes de los autovectores se pueden escribir en la siguiente forma:*

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{h_3 \uparrow h_1}{h_2 \uparrow h_3}, \quad \frac{x_3}{x_1} = \frac{h_1 \uparrow h_2}{h_2 \uparrow h_3}$$

Demostración.
Sea : $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$
Como $(f - \lambda)(x) = 0$, entonces:

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow (f - \lambda)(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3) = 0\\
&\Rightarrow f(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3) - \lambda(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3) = 0\\
&\Rightarrow x_1f(e_1) + x_2f(e_2) + x_3f(e_3) - \lambda x_1e_1 - \lambda x_2e_2 - \lambda x_3e_3 = 0\\
&\Rightarrow x_1f_1 + x_2f_2 + x_3f_3 - \lambda x_1e_1 - \lambda x_2e_2 - \lambda x_3e_3 = 0\\
&\Rightarrow x_1(\underbrace{f_1 - \lambda e_1}_{h_1}) + x_2(\underbrace{f_2 - \lambda e_2}_{h_2}) + x_3(\underbrace{f_3 - \lambda e_3}_{h_3}) = 0\\
&\Rightarrow h_k = f_k - \lambda e_k, \quad k = 1, 2, 3\\
&\Rightarrow x_1h_1 + x_2h_2 + x_3h_3 = 0\\
&\Rightarrow x_1h_1 \uparrow h_3 + x_2h_2 \uparrow h_3 + x_3 \underbrace{h_3 \uparrow h_3}_{0} = 0\\
&\Rightarrow x_1h_1 \uparrow h_3 + x_2h_2 \uparrow h_3 = 0\\
&\Rightarrow x_2h_2 \uparrow h_3 = -x_1h_1 \uparrow h_3 = x_1h_3 \uparrow h_1\\
&\Rightarrow \frac{x_2}{x_1} = \frac{h_3 \uparrow h_1}{h_2 \uparrow h_3}
\end{aligned}$$

También se tiene que:

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow x_1h_1 \uparrow h_2 + x_2 \underbrace{h_2 \uparrow h_2}_{0} + x_3h_3 \uparrow h_2 = 0\\
&\Rightarrow x_1h_1 \uparrow h_2 + x_3h_3 \uparrow h_2 = 0\\
&\Rightarrow x_1h_1 \uparrow h_2 = -x_3h_3 \uparrow h_2 = x_3h_2 \uparrow h_3\\
&\Rightarrow \frac{x_3}{x_1} = \frac{h_1 \uparrow h_2}{h_2 \uparrow h_3}
\end{aligned}$$

□

Observación 3.5.10.

1. *Si λ es raíz única de la ecuación característica, dos de los tres vectores h_k son l.i y solo una componente de x puede ser especificada arbitrariamente.*

2. *Si λ es raíz doble de la ecuación característica, los h_k no son l.i y dos componentes de x pueden ser especificadas arbitrariamente.*

   - *Si $x_1 = x_2 = 1$, entonces:*

$$\begin{aligned} \Rightarrow & x_1h_1 + x_2h_2 + x_3h_3 = 0 \\ & h_1 + h_2 + x_3h_3 = 0 \end{aligned}$$

   - *Si $x_1 = 1$ y $x_3 = 0$, entonces:*

$$\begin{aligned} \Rightarrow & x_1h_1 + x_2h_2 + x_3h_3 = 0 \\ & h_1 + x_2h_2 = 0 \end{aligned}$$

3. *Cualquier otro autovalor obtenido por una elección diferente de componentes sera una combinación lineal de esos dos autovectores.*

4. *Los autovectores correspondientes a la raíz doble de la ecuación característica forman un plano.*

Ejercicio 3.5.11. *Sea:*

$$[f] = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Hallar:

a) *El polinomio característico.*

b) *Los autovalores y los autovectores.*

Solución:
Considerando la base canónica de $\mathbb{R}^3$, tenemos:

$$\begin{aligned} f(e_1) &= f_1 = 4e_1 + e_2 - e_3 \\ f(e_2) &= f_2 = 2e_1 + 5e_2 - 2e_3 \\ f(e_3) &= f_3 = e_1 + e_2 + 2e_3 \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} f_1 \uparrow f_2 &= (4e_1 + e_2 - e_3) \uparrow (2e_1 + 5e_2 - 2e_3) \\ &= 8\underbrace{e_1 \uparrow e_1}_{0} + 20e_1 \uparrow e_2 - 8e_1 \uparrow e_3 + 2e_2 \uparrow e_1 + 5\underbrace{e_2 \uparrow e_2}_{0} - 2e_2 \uparrow e_3 \\ &- 2e_3 \uparrow e_1 - 5e_3 \uparrow e_2 + 2\underbrace{e_3 \uparrow e_3}_{0} \\ &= 20e_1 \uparrow e_2 - 8e_1 \uparrow e_3 - 2e_1 \uparrow e_2 - 2e_2 \uparrow e_3 + 2e_1 \uparrow e_3 + 5e_2 \uparrow e_3 \\ \Rightarrow f_1 \uparrow f_2 &= 18e_1 \uparrow e_2 - 6e_1 \uparrow e_3 + 3e_2 \uparrow e_3 \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} f_2 \uparrow f_3 &= (2e_1 + 5e_2 - 2e_3) \uparrow (e_1 + e_2 + 2e_3) \\ &= 2\underbrace{e_1 \uparrow e_1}_{0} + 2e_1 \uparrow e_2 + 4e_1 \uparrow e_3 + 5e_2 \uparrow e_1 + 5\underbrace{e_2 \uparrow e_2}_{0} + 10e_2 \uparrow e_3 \\ &- 2e_3 \uparrow e_1 - 2e_3 \uparrow e_2 - 4\underbrace{e_3 \uparrow e_3}_{0} \\ &= 2e_1 \uparrow e_2 + 4e_1 \uparrow e_3 - 5e_1 \uparrow e_2 + 10e_2 \uparrow e_3 + 2e_1 \uparrow e_3 + 2e_2 \uparrow e_3 \\ \Rightarrow f_2 \uparrow f_3 &= -3e_1 \uparrow e_2 + 6e_1 \uparrow e_3 + 12e_2 \uparrow e_3 \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} f_3 \uparrow f_1 &= (e_1 + e_2 + 2e_3) \uparrow (4e_1 + e_2 - e_3) \\ &= 4\underbrace{e_1 \uparrow e_1}_{0} + e_1 \uparrow e_2 - e_1 \uparrow e_3 + 4e_2 \uparrow e_1 + \underbrace{e_2 \uparrow e_2}_{0} - e_2 \uparrow e_3 \\ &+ 8e_3 \uparrow e_1 + 2e_3 \uparrow e_2 - 2\underbrace{e_3 \uparrow e_3}_{0} \\ &= e_1 \uparrow e_2 - e_1 \uparrow e_3 - 4e_1 \uparrow e_2 - e_2 \uparrow e_3 - 8e_1 \uparrow e_3 - 2e_2 \uparrow e_3 \\ \Rightarrow f_3 \uparrow f_1 &= -3e_1 \uparrow e_2 - 9e_1 \uparrow e_3 - 3e_2 \uparrow e_3 \end{aligned}$$

Luego :

$$f_1 \uparrow f_3 = 3e_1 \uparrow e_2 + 9e_1 \uparrow e_3 + 3e_2 \uparrow e_3$$

- $$\begin{aligned} f_1 \uparrow f_2 \uparrow f_3 &= (f_1 \uparrow f_2) \uparrow f_3 \\ &= (18e_1 \uparrow e_2 - 6e_1 \uparrow e_3 + 3e_2 \uparrow e_3) \uparrow (e_1 + e_2 + 2e_3) \\ &= 18(e_1 \uparrow e_2) \uparrow e_1 + 18(e_1 \uparrow e_2) \uparrow e_2 + 36(e_1 \uparrow e_2) \uparrow e_3 \\ &- 6(e_1 \uparrow e_3) \uparrow e_1 - 6(e_1 \uparrow e_3) \uparrow e_2 - 12(e_1 \uparrow e_3) \uparrow e_3 \\ &+ 3(e_2 \uparrow e_3) \uparrow e_1 + 3(e_2 \uparrow e_3) \uparrow e_2 + 6(e_2 \uparrow e_3) \uparrow e_3 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 18(-e_2 \uparrow e_1) \uparrow e_1 + 18e_1 \uparrow (\underbrace{e_2 \uparrow e_2}_{0}) + 36e_1 \uparrow e_2 \uparrow e_3 \\
&- 6(-e_3 \uparrow e_1) \uparrow e_1 - 6e_1 \uparrow (e_3 \uparrow e_2) - 12e_1 \uparrow (\underbrace{e_3 \uparrow e_3}_{0}) \\
&+ 3e_2 \uparrow (e_3 \uparrow e_1) + 3(-e_3 \uparrow e_2) \uparrow e_2 + 6e_2 \uparrow (\underbrace{e_3 \uparrow e_3}_{0}) \\
&= -18e_2 \uparrow (\underbrace{e_1 \uparrow e_1}_{0}) + 36e_1 \uparrow e_2 \uparrow e_3 + 6e_3 \uparrow (\underbrace{e_1 \uparrow e_1}_{0}) \\
&- 6e_1 \uparrow (-e_2 \uparrow e_3) + 3e_2 \uparrow (-e_1 \uparrow e_3) - 3e_3 \uparrow (\underbrace{e_2 \uparrow e_2}_{0}) \\
&= 36e_1 \uparrow e_2 \uparrow e_3 + 6e_1 \uparrow e_2 \uparrow e_3 + 3(e_2 \uparrow -e_1) \uparrow e_3 \\
&= 36e_1 \uparrow e_2 \uparrow e_3 + 6e_1 \uparrow e_2 \uparrow e_3 + 3e_1 \uparrow e_2 \uparrow e_3
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow f_1 \uparrow f_2 \uparrow f_3 = 45e_1 \uparrow e_2 \uparrow e_3$$

Hallando los coeficientes del polinomio característico:

- $$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\alpha_1} &= e_1 \downarrow f_1 + e_2 \downarrow f_2 + e_3 \downarrow f_3 \\
&= e_1 \downarrow (4e_1 + e_2 - e_3) + e_2 \downarrow (2e_1 + 5e_2 - 2e_3) + e_3 \downarrow (e_1 + e_2 + 2e_3) \\
&= 4e_1 \downarrow e_1 + \underbrace{e_1 \downarrow e_2}_{0} - \underbrace{e_1 \downarrow e_3}_{0} + 2\underbrace{e_2 \downarrow e_1}_{0} + 5e_2 \downarrow e_2 - 2\underbrace{e_2 \downarrow e_3}_{0} + \underbrace{e_3 \downarrow e_1}_{0} + \underbrace{e_3 \downarrow e_2}_{0} + 2e_3 \downarrow e_3 \\
&= 4e_1 \downarrow e_1 + 5e_2 \downarrow e_2 + 2e_3 \downarrow e_3 \\
&= 4\underbrace{e_1 e_1}_{1} + 5\underbrace{e_2 e_2}_{1} + 2\underbrace{e_3 e_3}_{1} \\
\boldsymbol{\alpha_1} &= \mathbf{11}
\end{aligned}
$$

- $$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\alpha_2} &= \boldsymbol{(e_3 \uparrow e_2) \downarrow (f_2 \uparrow f_3) + (e_3 \uparrow e_1) \downarrow (f_1 \uparrow f_3) + (e_2 \uparrow e_1) \downarrow (f_1 \uparrow f_2)} \\
&= \mathbf{12 + 9 + 18} \\
\boldsymbol{\alpha_2} &= \mathbf{39}
\end{aligned}
$$

Por proposición 3.5.7, 2.4.3(2), 1.2.2(2), tenemos:

- $$
\begin{aligned}
\boldsymbol{(e_3 \uparrow e_2) \downarrow (f_2 \uparrow f_3)} &= -(e_3e_2e_1)[(f_2 \uparrow e_1) \uparrow f_3] \\
&= -(-(e_1e_2e_3))[(-e_1 \uparrow f_2) \uparrow f_3] \\
&= -e_1e_2e_3[e_1 \uparrow (f_2 \uparrow f_3)] \\
&= -\tau[e_1 \uparrow (-3e_1 \uparrow e_2 + 6e_1 \uparrow e_3 + 12e_2 \uparrow e_3)]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= -\tau[-3e_1 \uparrow (e_1 \uparrow e_2) + 6e_1 \uparrow (e_1 \uparrow e_3) + 12e_1 \uparrow (e_2 \uparrow e_3)] \\
&= 3\tau[e_1 \uparrow (e_1 \uparrow e_2)] - 6\tau[e_1 \uparrow (e_1 \uparrow e_3)] - 12\tau[e_1 \uparrow (e_2 \uparrow e_3)] \\
&= 3\tau[\underbrace{(e_1 \uparrow e_1)}_{0} \uparrow e_2] - 6\tau[\underbrace{(e_1 \uparrow e_1)}_{0} \uparrow e_3] - 12\tau[e_1 \uparrow (e_2 \uparrow e_3)] \\
&= -12\tau[e_1 \uparrow (e_2 \uparrow e_3)] \\
&= -12\tau\tau \\
&= -12\underbrace{\tau^2}_{-1}
\end{aligned}
$$

$$\boldsymbol{(e_3 \uparrow e_2) \downarrow (f_2 \uparrow f_3) = 12}$$

- $\boldsymbol{(e_3 \uparrow e_1) \downarrow (f_1 \uparrow f_3)}$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{(e_3 \uparrow e_1) \downarrow (f_1 \uparrow f_3)} &= -(e_3e_2e_1)[(e_2 \uparrow f_1) \uparrow f_3] \\
&= -(-(e_1e_2e_3))[(e_2 \uparrow (f_1 \uparrow f_3)] \\
&= e_1e_2e_3[e_2 \uparrow (f_1 \uparrow f_3)] \\
&= \tau[e_2 \uparrow (3e_1 \uparrow e_2 + 9e_1 \uparrow e_3 + 3e_2 \uparrow e_3)] \\
&= \tau[3e_2 \uparrow (e_1 \uparrow e_2) + 9e_2 \uparrow (e_1 \uparrow e_3) + 3e_2 \uparrow (e_2 \uparrow e_3)] \\
&= 3\tau[e_2 \uparrow (e_1 \uparrow e_2)] + 9\tau[e_2 \uparrow (e_1 \uparrow e_3)] + 3\tau[e_2 \uparrow (e_2 \uparrow e_3)] \\
&= 3\tau[e_2 \uparrow (-e_2 \uparrow e_1)] + 9\tau[(e_2 \uparrow e_1) \uparrow e_3] + 3\tau[\underbrace{(e_2 \uparrow e_2)}_{0} \uparrow e_3] \\
&= 3\tau[-\underbrace{(e_2 \uparrow e_2)}_{0} \uparrow e_1)] + 9\tau[(-e_1 \uparrow e_2) \uparrow e_3] \\
&= 9\tau[(-e_1 \uparrow e_2) \uparrow e_3] \\
&= -9\tau\tau \\
&= -9\underbrace{\tau^2}_{-1}
\end{aligned}
$$

$$\boldsymbol{(e_3 \uparrow e_1) \downarrow (f_1 \uparrow f_3) = 9}$$

- $\boldsymbol{(e_2 \uparrow e_1) \downarrow (f_1 \uparrow f_2)}$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{(e_2 \uparrow e_1) \downarrow (f_1 \uparrow f_2)} &= (e_3e_2e_1)[(f_1 \uparrow f_2) \uparrow e_3] \\
&= -(e_1e_2e_3)[(e_3 \uparrow (f_1 \uparrow f_2)] \\
&= -\tau[e_3 \uparrow (18e_1 \uparrow e_2 - 6e_1 \uparrow e_3 + 3e_2 \uparrow e_3)] \\
&= -\tau[18e_3 \uparrow (e_1 \uparrow e_2) - 6e_3 \uparrow (e_1 \uparrow e_3) + 3e_3 \uparrow (e_2 \uparrow e_3)] \\
&= -18\tau[e_3 \uparrow (e_1 \uparrow e_2)] + 6\tau[e_3 \uparrow (e_1 \uparrow e_3)] - 3\tau[e_3 \uparrow (e_2 \uparrow e_3)] \\
&= -18\tau[(e_3 \uparrow e_1) \uparrow e_2] + 6\tau[e_3 \uparrow (-e_3 \uparrow e_1)] - 3\tau[e_3 \uparrow (-e_3 \uparrow e_2)] \\
&= -18\tau[(-e_1 \uparrow e_3) \uparrow e_2] + 6\tau[-\underbrace{(e_3 \uparrow e_3)}_{0} \uparrow e_1] - 3\tau[-\underbrace{(e_3 \uparrow e_3)}_{0} \uparrow e_2]
\end{aligned}
$$

$$= -18\tau[e_1 \uparrow (-e_3 \uparrow e_2)]$$
$$= -18\tau[e_1 \uparrow (e_2 \uparrow e_3)]$$
$$= -18\tau\tau$$
$$= -18 \underbrace{\tau^2}_{-1}$$
$$\boldsymbol{(e_2 \uparrow e_1) \downarrow (f_1 \uparrow f_2) = 18}$$

Por proposición 2.3.8(7), 2.4.3(2), tenemos:

- $\boldsymbol{\alpha_3} = (e_3 \uparrow e_2 \uparrow e_1) \downarrow (f_1 \uparrow f_2 \uparrow f_3)$
  $= (-e_1 \uparrow e_2 \uparrow e_3) \downarrow (45e_1 \uparrow e_2 \uparrow e_3)$
  $= -45(e_1 \uparrow e_2 \uparrow e_3) \downarrow (e_1 \uparrow e_2 \uparrow e_3)$
  $= -45(e_1 \uparrow e_2 \uparrow e_3)(e_1 \uparrow e_2 \uparrow e_3)$
  $= -45(e_1e_2e_3)(e_1e_2e_3)$
  $= -45\tau\tau$
  $= -45\tau^2$
  $= -45(-1)$
  $\boldsymbol{\alpha_3 = 45}$

Luego la ecuación característica es de la forma:

$$\lambda^3 - 11\lambda^2 + 39\lambda - 45 = 0$$
$$\Rightarrow (\lambda - 5)(\lambda - 3)^2 = 0$$

Hallamos el autovector asociado al autovalor $\lambda = 5$:
Por proposición 3.5.9 sabemos que:

$$h_k = f_k - \lambda e_k$$
$$\Rightarrow h_k = f_k - 5e_k$$

- $h_1 = f_1 - 5e_1$
  $= 4e_1 + e_2 - e_3 - 5e_1$
  $h_1 = -e_1 + e_2 - e_3$

- $h_2 = f_2 - 5e_2$
  $= 2e_1 + 5e_2 - 2e_3 - 5e_2$
  $h_2 = 2e_1 - 2e_3$

$$\begin{aligned}\bullet\ h_3 &= f_3 - 5e_3\\ &= e_1 + e_2 + 2e_3 - 5e_3\\ h_3 &= e_1 + e_2 - 3e_3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bullet\ h_1 \uparrow h_2 &= (-e_1 + e_2 - e_3) \uparrow (2e_1 - 2e_3)\\ &= -2\underbrace{e_1 \uparrow e_1}_{0} + 2e_1 \uparrow e_3 + 2e_2 \uparrow e_1 - 2e_2 \uparrow e_3 - 2e_3 \uparrow e_1 + 2\underbrace{e_3 \uparrow e_3}_{0}\\ &= 2e_1 \uparrow e_3 - 2e_1 \uparrow e_2 - 2e_2 \uparrow e_3 + 2e_1 \uparrow e_3\\ &= -2e_1 \uparrow e_2 + 4e_1 \uparrow e_3 - 2e_2 \uparrow e_3\\ \Rightarrow h_1 \uparrow h_2 &= -(2e_1 \uparrow e_2 - 4e_1 \uparrow e_3 + 2e_2 \uparrow e_3)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bullet\ h_2 \uparrow h_3 &= (2e_1 - 2e_3) \uparrow (e_1 + e_2 - 3e_3)\\ &= 2\underbrace{e_1 \uparrow e_1}_{0} + 2e_1 \uparrow e_2 - 6e_1 \uparrow e_3 - 2e_3 \uparrow e_1 - 2e_3 \uparrow e_2 + 6\underbrace{e_3 \uparrow e_3}_{0}\\ &= 2e_1 \uparrow e_2 - 6e_1 \uparrow e_3 + 2e_1 \uparrow e_3 + 2e_2 \uparrow e_3\\ \Rightarrow h_2 \uparrow h_3 &= 2e_1 \uparrow e_2 - 4e_1 \uparrow e_3 + 2e_2 \uparrow e_3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bullet\ h_3 \uparrow h_1 &= (e_1 + e_2 - 3e_3) \uparrow (-e_1 + e_2 - e_3)\\ &= -\underbrace{e_1 \uparrow e_1}_{0} + e_1 \uparrow e_2 - e_1 \uparrow e_3 - e_2 \uparrow e_1 + \underbrace{e_2 \uparrow e_2}_{0} - e_2 \uparrow e_3\\ &\quad + 3e_3 \uparrow e_1 - 3e_3 \uparrow e_2 + 3\underbrace{e_3 \uparrow e_3}_{0}\\ &= e_1 \uparrow e_2 - e_1 \uparrow e_3 + e_1 \uparrow e_2 - e_2 \uparrow e_3 - 3e_1 \uparrow e_3 + 3e_2 \uparrow e_3\\ \Rightarrow h_3 \uparrow h_1 &= 2e_1 \uparrow e_2 - 4e_1 \uparrow e_3 + 2e_2 \uparrow e_3\end{aligned}$$

$$\Rightarrow h_2 \uparrow h_3 = h_3 \uparrow h_1 = -h_1 \uparrow h_2$$

Sabemos que:

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{h_3 \uparrow h_1}{h_2 \uparrow h_3}, \quad \frac{x_3}{x_1} = \frac{h_1 \uparrow h_2}{h_2 \uparrow h_3}$$

Si $x_1 = 1$ *:*

$$\Rightarrow \frac{x_2}{1} = \frac{h_3 \uparrow h_1}{h_2 \uparrow h_3} = \frac{h_3 \uparrow h_1}{h_3 \uparrow h_1} = 1$$

$$\Rightarrow x_2 = 1$$

También:

$$\frac{x_3}{1} = \frac{h_1 \uparrow h_2}{h_2 \uparrow h_3} = -\frac{h_2 \uparrow h_3}{h_2 \uparrow h_3} = -1$$
$$\Rightarrow x_3 = -1$$

Sabemos que:

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$$
$$\Rightarrow \boldsymbol{x_1} = e_1 + e_2 - e_3$$

es el autovector asociado al autovalor λ = 5

Hallamos el autovector asociado al autovalor λ = 3 :
Por proposición 3.5.9 sabemos que:

$$h_k = f_k - \lambda e_k$$
$$\Rightarrow h_k = f_k - 3e_k$$

- $$\begin{aligned} h_1 &= f_1 - 3e_1 \\ &= 4e_1 + e_2 - e_3 - 3e_1 \\ h_1 &= e_1 + e_2 - e_3 \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} h_2 &= f_2 - 3e_2 \\ &= 2e_1 + 5e_2 - 2e_3 - 3e_2 \\ &= 2e_1 + 2e_2 - 2e_3 \\ h_2 &= 2(e_1 + e_2 - e_3) \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} h_3 &= f_3 - 3e_3 \\ &= e_1 + e_2 + 2e_3 - 3e_3 \\ h_3 &= e_1 + e_2 - e_3 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow h_1 = h_3 = \frac{1}{2} h_2$$
$$\Rightarrow 2h_1 = h_2 = 2h_3$$

Sabemos que :

$$x_1 h_1 + x_2 h_2 + x_3 h_3 = 0$$

- *Si* $x_1 = x_2 = 1$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow & h_1 + h_2 + x_3 h_3 = 0 \\
& h_1 + 2h_1 + x_3 h_1 = 0 \\
& 3h_1 + x_3 h_1 = 0 \\
& (3 + x_3) h_1 = 0
\end{aligned}$$

Como $\quad h_1 \neq 0 \Rightarrow x_3 = -3$

Sabemos que:

$$\begin{aligned}
x &= x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 \\
x &= e_1 + e_2 - 3e_3 \\
\Rightarrow \boldsymbol{x_2} &= e_1 + e_2 - 3e_3
\end{aligned}$$

es el autovector asociado al autovalor λ *= 3*

- *Si* $x_3 = 0$ *y* $x_1 = 1$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow & h_1 + x_2 h_2 = 0 \\
& h_1 + x_2 (2h_1) = 0 \\
& (1 + 2x_2) h_1 = 0
\end{aligned}$$

Como: $\quad h_1 \neq 0 \Rightarrow x_2 = -\dfrac{1}{2}$

Sabemos que:

$$\begin{aligned}
x &= x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 \\
x &= e_1 - \frac{1}{2} e_2 \\
\Rightarrow \boldsymbol{x_3} &= e_1 - \frac{1}{2} e_2
\end{aligned}$$

es el autovector asociado al autovalor λ *= 3*

3.5.3. Operadores Simétricos

Definición 3.5.12. *Un operador lineal $S : E \to E$ es simétrico si :*

$$\overline{S} = S$$

Observación 3.5.13.

1. *Las tres raíces de la ecuación característica de un operador simétrico son reales.*

Proposición 3.5.14. *Los autovectores de un operador simétrico $S : E \to E$ con autovalores distintos son ortogonales.*

Demostración.
Si x e y son autovectores de un operador simétrico S, entonces:

$$\begin{aligned} Sx &= \lambda_1 x \\ Sy &= \lambda_2 y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda_1(y \downarrow x) &= y \downarrow \lambda_1 x \\ &= y \downarrow Sx \\ &= y \downarrow \overline{S}x \\ &= \overline{S}x \downarrow y \\ &= x \downarrow S(y) \\ &= x \downarrow \lambda_2(y) \\ &= \lambda_2(x \downarrow y) \\ &= \lambda_2(y \downarrow x) \\ \Rightarrow \lambda_1(y \downarrow x) &= \lambda_2(y \downarrow x) \\ \Rightarrow (\lambda_1 - \lambda_2)y \downarrow x &= 0 \end{aligned}$$

Si $\lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow y \downarrow x = 0$.
Si $\lambda_1 = \lambda_2 \Rightarrow y \downarrow x \neq 0$. □

3.6. Operadores Ortogonales

Definición 3.6.1. *Un operador lineal $G : E \to E$ es ortogonal si :*

$$G\overline{G} = \overline{G}G = I$$

Proposición 3.6.2. *$G : E \to E$ es un operador ortogonal si y solo si:*

$$G(x) \downarrow G(y) = x \downarrow y \ \ \forall x, y \in E$$

Demostración.
Probaremos que si G es un operador ortogonal implica $G(x) \downarrow G(y) = x \downarrow y \ \ \forall x, y \in E$
Tenemos por hipótesis: $G\overline{G} = \overline{G}G = I$
Por definición de operador adjunto y por definición operador ortogonal, tenemos:
Sea $x, y \in E$:

$$\begin{aligned} G(x) \downarrow G(y) &= x \downarrow \overline{G}(G(y)) \\ &= x \downarrow \overline{G}G(y) \\ &= x \downarrow I(y) \\ \Rightarrow G(x) \downarrow G(y) &= x \downarrow y \end{aligned}$$

Recíprocamente si se satisface: $G(x) \downarrow G(y) = x \downarrow y \quad \forall x, y \in E$

$$\begin{aligned} \Rightarrow x \downarrow y &= x \downarrow \overline{G}(G(y)) \\ y &= \overline{G}(G(y)) \\ y &= \overline{G}G(y) \\ \Rightarrow \overline{G}G &= I \end{aligned}$$

Entonces G es ortogonal. □

3.7. Operadores Normales

Definición 3.7.1. *Un operador lineal $N : E \to E$ es normal si :*

$$N\overline{N} = \overline{N}N$$

Ejercicio 3.7.2. *Sea $N : E \to E$ un operador normal.*
Probar que: $N(x) = 0$ si y solo si $\overline{N}(x) = 0$

Demostración.
Por definición de operador adjunto y operador normal, tenemos:

$$\begin{aligned} N(x) \downarrow N(x) &= x \downarrow \overline{N}(N(x)) \\ &= x \downarrow \overline{N}N(x) \\ &= x \downarrow N\overline{N}(x) \\ &= \overline{N}(x) \downarrow \overline{N}(x) \end{aligned}$$

Probaremos que si $N(x) = 0$ implica $\overline{N}(x) = 0$:
Tenemos por hipótesis: $N(x) = 0$

Por propiedad de producto interno, tenemos:

$$\Rightarrow N(x) \downarrow N(x) = 0$$
$$\Rightarrow \overline{N}(x) \downarrow \overline{N}(x) = 0$$
$$\Rightarrow \overline{N}(x) = 0$$

Recíprocamente si se satisface: $\overline{N}(x) = 0$

$$\Rightarrow \overline{N}(x) \downarrow \overline{N}(x) = 0$$
$$\Rightarrow N(x) \downarrow N(x) = 0$$
$$\Rightarrow N(x) = 0$$

$\square$

Bibliografía

[1] Ablamawics, R. and Sobczyk, G.(2004). *Lectures on Clifford (Geometric) Algebras and Applications.* Springer.

[2] Bromborsky, A.(2010). *An introduction to geometric algebra and calculus.*

[3] Doran, C. and Lasenby, A.(1999). *Physical applications of geometric algebra.* Cambridge University Lecture Course.

[4] Hestenes, D.(2012). *New Foundations for Classical Mechanics.* Springer Science Business Media.

[5] Lages Lima, E.(1998). *Álgebra Lineal.* Instituto de Matemáticas de Ciencias Afines, IMCA, UNI.

[6] Lounesto, P.(2001). *Clifford algebras and spinors.* Cambridge University Press.

[7] Snygg, J.(1997). *Clifford Algebra: A Computacional tool for physicists.* Oxford University Press.

[8] Vaz Jr., J.(1997). A álgebra geométrica do espaco euclideano e a teoría de Pauli. *Revista Brasileira de Ensino de Física,* Vol. 19(2).

[9] Vaz Jr., J.(2000). A algebra geométrica do espaco-tempo e a teoría da relatividade. *Revista Brasileira de Ensino de Física,* Vol. 22(1).

[10] Vera Saravia, E.(2014). *Álgebras geométricas euclideanas tridimensionales.* Departamento de Matemáticas de la UNMSM, Lima-Perú.